Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Compito pomeridiano del 29/11/05

Esercizio 1. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

e sia φ la forma quadratica associata.
1.1. Utilizzando la nozione di vettore non-isotropo, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ che porti φ in forma canonica affine [1].
1.2. Determinare una base *ortonormale* $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi φ.[2]
1.3. Determinare una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ma *non* diagonalizzi la forma φ.
1.4. Determinare una base $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi φ ma *non* diagonalizzi L_A.
1.5. Determinare equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale W di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ su cui φ si restringe a una forma quadratica positiva, ossia $\varphi(\underline{w}) \geq 0$ per ogni $\underline{w} \in W$, l'uguale valendo se e solo se $\underline{w} = \underline{0}$.

Determinare equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ su cui φ si restringe a una forma quadratica definita negativa.

Determinare equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ su cui φ si restringe a una forma indefinita non degenere.

Esercizio 2 Sia $V = \mathbb{R}^{2n}$ e sia b una forma bilineare simmetrica non degenere con indice di positività ed indice di negatività uguali.
2.1. Si determini un sottospazio $W \subset V$ di dimensione n tale che la forma b ristretta a W sia identicamente nulla, cioè $b(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in W$.
2.2. Il sottospazio W del punto precedente è unico?
Suggerimento Cominciate dal caso $n = 1$.

Esercizio 3 Sia $V = \mathbb{R}^n$. Considerate la forma quadratica data da $\varphi(x_1, \ldots, x_n)= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j$ nelle coordinate fissate dalla base canonica. Determinare la forma canonica metrica di φ.
Suggerimento Calcolare il rango e la traccia della matrice associata a φ...

Per casa

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$. Considerate la forma quadratica data

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 + x_4^2.$$

nelle coordinate fissate dalla base canonica. Deteminare la forma canonica metrica di φ e una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che porti φ in forma canonica metrica.

---

[1] Suggerimento: cominciate col trovare un vettore non isotropo $\underline{w}_1$; poi cercate un secondo vettore della base nel b-ortogonale di $\mathbb{R}\underline{w}_1$ e, inoltre, non-isotropo. Continuate induttivamente e costruite $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ che sia diagonalizzante. Normalizzando oppurtanamente, trovate una base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ che porti φ in forma canonica affine.

[2] Più precisamente se $\underline{y}$ sono le coordinate associate a $\mathcal{C}$ si ha che $\varphi(\underline{y}) = \sum \alpha_i y_i^2$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Determinare la forma canonica affine della forma quadratica espressa nelle coordinate fissate dalla base canonica da
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$