Geometria Analitica. a.a. 05/06.

Complementi su forme quadratiche (distribuiti il 28/11/05)

Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia

$$<\, ,\, >: V \times V \to \mathbb{R}$$

un prodotto scalare; per definizione questo vuol dire che $<\, ,\, >$ è una forma bilineare simmetrica. Per ragioni tipografiche preferisco utilizzare la notazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ per il prodotto scalare $<\, ,\, >: V \times V \to \mathbb{R}$: quindi $b(\, ,\,) :=<\, ,\, >$ Sia V di dimensione n e $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Rimane allora definita la matrice associata a $b(\, ,\,)$ nella base fissata; per definizione questa è la matrice *simmetrica*

$$A \equiv |a_{ij}| := |b(\underline{v}_j, \underline{v}_i)| \equiv |b(\underline{v}_i, \underline{v}_j)|\,.$$

L'espressione della forma bilineare nelle coordinate fissate dalla base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è data da

$$(1) \qquad b(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\, ,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) = |y_1, \dots, y_n|\, A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T A\, \underline{x}$$

Questa formula segue dalla bilinearità e dalla simmetria.
Viceversa, data una matrice *simmetrica* $A = |a_{i\,j}|$ possiamo definire una forma bilineare simmetrica $b_A : V \times V \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(2) \qquad b_A(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\, ,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) = |y_1, \dots, y_n|\, A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T A\, \underline{x}$$

Si verifica immediatamente che la matrice associata a $b_A(\, ,\,)$ nella base fissata $\mathcal{B}$ è proprio A.

Associata ad una forma bilineare simmetrica $b(\, ,\,)$ abbiamo la forma quadratica $\phi(\underline{v}) = b(\underline{v}, \underline{v})$, che è detta forma quadratica associata a $b(\, ,\,)$. Per la forma quadratica, o equivalentemente per la forma bilineare $b(\, ,\,)$ possiamo definire l'indice di nullità $i_0(\phi)$, l'indice di positività $i_+(\phi)$ e l'indice di negatività $i_-(\phi)$.

Come applicazione del teorema spettrale abbiamo visto che ogni forma quadratica ϕ è affinemente equivalente alla forma quadratica canonica ϕ_0 definita dalla matrice diagonale

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} I_{i_+(\phi)} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{i_-(\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{i_0(\phi)} \end{vmatrix}$$

Equivalentemente esiste una base $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$ di V, con coordinate associate $\underline{y}$, tale che ϕ si scriva in queste coordinate nella forma

$$y_1^2 + \cdots + y_{i_+(\phi)}^2 - y_{i_+(\phi)+1}^2 - \cdots - y_{i_+(\phi)+i_-(\phi)}^2\,.$$

Abbiamo dimostrato questi fatti fondamentali facendo vedere che se A è la matrice associata a ϕ in un base arbitraria, allora A è congruente alla matrice (3).

È interessante osservare che questo teorema può essere dimostrato senza far uso del teorema spettrale. Il passo fondamentale è il seguente:

Teorema *Sia* $b : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base di* V*,* $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$*, che diagonalizza* $b(\,,\,)$*, tale cioè che* $b(\underline{f}_i, \underline{f}_j) = 0$ *per* $i \neq j$*.*

Prima di passare alla dimostrazione, premettiamo una definizione ed un' *osservazione fondamentale*. Un vettore $\underline{v}$ è isotropo per $b(\,,\,)$ se $b(\underline{v}, \underline{v}) = 0$. Osserviamo che se $\underline{f}$ è un vettore *non isotropo* di V allora vale la decomposizione

$$V = \mathbb{R}\underline{f} \oplus (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} \tag{4}$$

dove

$$(\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} = \{\underline{v} \in V \mid b(\underline{v}, \underline{f}) = 0\} .$$

In generale, per un qualsiasi sottospazio U di V si pone

$$U^{\perp_b} = \{\underline{v} \in V \mid b(\underline{v}, \underline{u}) = 0\,,\ \forall \underline{u} \in U\} .$$

$U^{\perp_b}$ è detto il b-ortogonale di U. La dimostrazione della decomposizione (3) utilizza una tecnica già vista per i prodotti scalari definiti positivi (che sono ovviamente particolari forme bilineari simmetriche). [1]

Dimostrazione teorema. Procediamo per induzione su $\dim V$. Se $\dim V = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali di dimensione $n - 1$ e dimostriamolo per spazi vettoriali di dimensione n.
Se $b(\,,\,)$ è la forma bilineare identicamente uguale a zero, allora non c'è nulla da dimostrare, dato che ogni base è diagonalizzante.
Se $b(\,,\,)$ non è identicamente nulla allora $\exists\, \underline{v}\,,\ \underline{w} \in V$ non nulli tali che $b(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$.
Ora, fra i tre vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}+\underline{w}$ ne esiste almeno uno che è *non isotropo*. Infatti se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono isotropi allora $b(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}) = b(\underline{v}, \underline{v}) + 2b(\underline{v}, \underline{w}) + b(\underline{w}, \underline{w}) = 0 + 2b(\underline{v}, \underline{w}) + 0 \neq 0$ come si voleva. Riassumendo: se $b(\,,\,)$ non è identicaente nulla allora esiste un vettore non isotropo $\underline{f}_1$. Ma allora, per l'*osservazione fondamentale*

$$V = \mathbb{R}\underline{f}_1 \oplus (\mathbb{R}\underline{f}_1)^{\perp_b} .$$

Sia $b'(\,,\,)$ la restrizione di $b(\,,\,)$ al sottospazio $(n-1)$-dimensionale $(\mathbb{R}\underline{g}_1)^{\perp_b}$. $b'(\,,\,)$ è ovviamente una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale di dimensione $(n - 1)$. Per ipotesi induttiva esiste una base $\{\underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n\}$ che diagonalizza $b'(\,,\,)$.

---

[1]**Dimostrazione di (4)**. Per ipotesi $\underline{f}$ è non isotropo; quindi, per definizione, $b(\underline{f}, \underline{f}) \neq 0$. Scriviamo allora

$$\underline{v} = \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f} + (\underline{v} - \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f})$$

Il primo addendo a destra appartiene sicuramente a $\mathbb{R}\underline{f}$. Verifichiamo che il secondo addendo appartiene a $(\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$; utilizzando la bilinearità abbiamo:

$$b(\underline{v} - \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f}\,,\ \underline{f}) = b(\underline{v}, \underline{f}) - b(\frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f}, \underline{f}) = b(\underline{v}, \underline{f}) - (\frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})})b(\underline{f}, \underline{f}) = 0$$

Quindi

$$V = \mathbb{R}\underline{f} + (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$$

Verifichaimo anche che $\mathbb{R}\underline{f} \cap (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} = \underline{0}$; se $\underline{w} \in \mathbb{R}\underline{f} \cap (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$ allora $\underline{w} = \alpha\underline{f}$ (perché $\underline{w} \in \mathbb{R}\underline{f}$) **e** $b(\underline{w}, \underline{f}) = 0$ (perché $\underline{w} \in (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$). Ma allora deve essere $\alpha b(\underline{f}, \underline{f}) = 0$ ed essendo $\underline{f}$ non isotropo deve necessariamente essere $\alpha = 0$ cioè $\underline{w} = \underline{0}$. Abbiamo dimostrato che $V = \mathbb{R}\underline{f} \oplus (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$.

Ma allora è immediato verificare che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n\}$ è una base diagonalizzante per $b(\, , \,)$. Il teorema è dimostrato.

Quindi possiamo diagonalizzare le forme bilineari simmetriche, o equivalentemente le forme quadratiche, senza utilizzare il teorema spettrale.
Sia $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$ la base diagonalizzante ottenuta tramite il procedimento induttivo appena spiegato. Se $\alpha_j = b(\underline{f}_j, \underline{f}_j)$ allora possiamo assumere, a meno di riordinare i vettori,

$\alpha_i > 0 \quad$ se $i \leq \rho_+$
$\alpha_i < 0 \quad$ se $(\rho_+ + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_-)$
$\alpha_i = 0 \quad$ se $((\rho_+ + \rho_-) + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_- + \rho_0)$.

Poniamo

$\underline{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \underline{f}_i \quad$ se $i \leq \rho_+$
$\underline{v}_i = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_i}} \underline{f}_i \quad$ se $(\rho_+ + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_-)$
$\underline{v}_i = \underline{f}_i \quad$ se $((\rho_+ + \rho_-) + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_- + \rho_0)$.

La matrice associata a $b(\, , \,)$ in questa base è

$$\begin{vmatrix} I_{\rho_+} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{\rho_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{\rho_0} \end{vmatrix} .$$

Si può dimostrare, ma noi non lo faremo, che gli interi ρ_+, ρ_- e ρ_0 sono uguali rispettivamente all'indice di positività, negatività e nullità della forma quadratica associata a $b(\, , \,)$.