Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Compito pomeridiano del 22/11/05
Complementi

Esercizio 1. Dimostrare il seguente

Teorema (Decomposizione spettrale) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale metrico V su un campo K. Sia T normale con tutti gli autovalori su K. Siano $V_T(\lambda_1), \ldots, V_T(\lambda_k)$ gli autospazi distinti di T e $P_{V_T(\lambda_i)}$ il relativo operatore di proiezione ortogonale su $V_T(\lambda_i)$. Allora

$$T = \lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)}.$$

Suggerimento. Dobbiamo dimostrare che due endomorfismi sono uguali. Per questo basta verificare che i due endomorfismi operano nello stesso modo sui vettori di una base di V. Una base conveniente è una base ortonormale di autovettori di T, che esiste in quanto T è normale con tutti gli autovalori su K.

Esercizio 2. In questo esercizio si dimostrerà in vari passi il seguente

Teorema (Diagonalizzazione simultanea) Siano A e B matrici reali diagonalizzabili. Si dimostri che A e B commutano se e solo se sono simultaneamente diagonalizzabili, ossia $AB = BA$ se e solo se esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ e $M^{-1}BM$ sono diagonali.

2.1. Dimostrare che se A e B sono matrici reali simultaneamente diagonalizzabili, allora commutano.
2.2. Siano A e B due matrici reali che commutano. Sia $V_A(\lambda)$ un autospazio dell'operatore associato ad A. Dimostare che $V_A(\lambda)$ è invariante per l'operatore L_B associato a B, ossia che $L_B(V_A(\lambda)) \subseteq V_A(\lambda)$.
2.3. Siano A e B due matrici reali che commutano e $L_A, L_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gli operatori lineari associati. Assumiamo che A sia diagonalizzabile e siano $V_A(\lambda_1), \ldots, V_A(\lambda_k)$ gli autospazi distinti di L_A. Sia $\underline{w}$ un autovettore di L_B con autovalore μ e con scrittura (unica) $\underline{w} = \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k$ con $\underline{v}_i \in V_A(\lambda_i)$.

Dimostrare che i vettori non nulli tra i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ sono autovettori di L_B con autovalore μ.
Suggerimento. Sappiamo che $B\underline{w} = \mu\underline{w}$. Dal punto **2.2.** segue che $B\underline{v}_i \in V_A(\lambda_i)$. La scrittura di $\mu\underline{w}$ come somma di vettori di $V_A(\lambda_1), \ldots, V_A(\lambda_k)$ è unica e quindi...
2.4. Siano A e B due matrici reali diagonalizzabili che commutano. Sia $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n\}$ una base di autovettori di L_B. Applicare **2.3.** ad ognuno dei vettori di tale base per trovare autovettori comuni $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_N\}$ di L_A e L_B con $N \geq n$.

Dedurre che esiste una base di autovettori comuni di L_A e L_B e che quindi A e B sono simultaneamente diagonalizzabili.

Esercizio 3. **(La successione esatta di spazi vettoriali)** Si consideri la seguente successione di spazi vettoriali ed applicazioni lineari

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$

e si supponga che per $i = 0, \ldots, n-1$ si abbia $\mathrm{Im} f_i = \mathrm{Ker} f_{i+1}$. Dimostare che

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^n \dim V_i = 0.$$

Suggerimento. Usare la ben nota relazione $\dim V_i = \dim(\mathrm{Ker} f_i) + \dim(\mathrm{Im} f_i)$.