**Geometria Analitica. a.a. 05/06.**
**Esercizi per casa del 27/10/05**

1. Consideriamo l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
(i) Dire se puó esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e $T$ sia un operatore simmetrico.
(ii) Dire se puó esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e $T$ sia un operatore ortogonale.
(iii) Determinare, se esiste, un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale $T$ è simmetrico[1].
(iv) Determinare, se esiste, un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale $T$ è ortogonale.

2. Sia $V$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $[-\pi, \pi]$ in $\mathbb{R}$. Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $V$ definito da $W = \text{Span}(\sin x, \cos x)$.
(i) Dimostrare che la dimensione di $W$ è 2.
(ii) Dimostrare che la forma $<,>: W \times W \to \mathbb{R}$ definita da
$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$
è un prodotto scalare definito positivo e che $\{\sin x, \cos x\}$ è una base ortogonale per tale prodotto scalare.
(iii) Verificare che $\{\sin x, \sin(x + \frac{\pi}{4})\}$ è una base di $W$. Ortonormalizzare tale base con il procedimento di Gram-Schmidt rispetto al prodotto scalare di (ii).

3. Segue dall'esempio 12.21 del libro "Geometria" di Abate che $A$ è una matrice in $O(2)$ se e solo se $A = R_\phi$ oppure $A = S_\phi$ con
$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$
Verificare che $R_\phi$ è diagonalizzabile sui reali se e solo se $\phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Verificare che $S_\phi$ è sempre diagonalizzabile sui reali. Descrivere geometricamente questi due operatori.[2]

[1] Scrivere la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di un generico prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Quale è la condizione su $A$ e $B$ affinchè $T$ sia simmetrico oppure ortogonale?

[2] Occorre qui utilizzare le formule trigonometriche
$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)\,, \quad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$$

4. Sia $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata e coordinate associate $(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Sia $W$ il sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori
$$\underline{g}_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad \underline{g}_2 = (0, 1, 0, 1).$$
Si consideri il vettore
$$\underline{h}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$
Sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{h}_1$.
(i) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $W$.
(ii) Sia $\underline{h}_2$ l'unico vettore generatore di $U^\perp$ verificante le due condizioni
$$||\underline{h}_2|| = 1 \qquad < \underline{h}_2, \underline{e}_2 >> 0.$$
Determinare le coordinate di $\underline{h}_2$.
(iii) Verificare che $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ costituiscono una base ortogonale di $W^\perp$.
(iv) Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito come segue
   - ∗ $W$ e $W^\perp$ sono sottospazi invarianti per $T$.
   - ∗ $T|_W =$ proiezione ortogonale sul vettore $\underline{g}_1$
   - ∗ $T|_{W^\perp}$ ha la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_1 + \underline{h}_2)$ come nucleo e la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_2 - \underline{h}_1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.

Spiegare perché $T$ è ben definito. Determinate la matrice associata a $T$ nella base canonica. (Suggerimento: esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice associata all'operatore $T$ è particolarmente semplice...)
(v) Verificare che il sottospazio $V$ di equazioni
$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$
è invariante per $T$. Dire se $T$ ristretto a $V$ è iniettivo.

5. Dimostrare che tutti gli autovalori di un endomorfismo unitario sono numeri complessi di modulo 1.

6. Sia $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore definito rispetto alla base canonica dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$
Spiegare perché $T$ è diagonalizzabile. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $T$.