Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Compito pomeridiano del 18/10/05

(1) Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ con prodotto scalare definito positivo

$$< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

consideriamo i tre vettori $p_0 = t^2 - 1$, $p_1 = t - 1$, $p_2 = t^2$.

(i) Verificare che $\{p_0, p_1, p_2\}$ è una base di V.

(ii) Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{p_0, p_1, p_2\}$ determinando una base ortonormale $\{q_0, q_1, q_2\}$.

(iii) Sia $W = Span(q_0, q_1)$. Scrivere la matrice associata all' operatore di proiezione ortogonale su W rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$.

(2) Sia $V = \mathbb{C}^2$. Verificare che

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= 2x_1\overline{y_1} + 2ix_1\overline{y_2} - 2ix_2\overline{y_1} + 4x_2\overline{y_2}$$

è un prodotto hermitiano definito positivo.

(3) Sia $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard. Consideriamo il sottospazio vettoriale

$$W =: \{\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$$

Consideriamo l' operatore di proiezione ortogonale $P_{W^\perp}$ sul sottospazio $W^\perp$. Determinare la matrice associata a $P_{W^\perp}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Suggerimento: se $W \subset \mathbb{R}^n$ è un iperpiano di equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

chi è un generatore della retta $W^\perp$?