

Geometria Analitica. a.a. 05/06. Gruppo A-H (Prof. P. Piazza)
Esercizi per casa del 14/10/05

Esercizio 1. Si consideri in \mathbb{R}^4 l'applicazione $\langle, \rangle: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Verificare che quest'applicazione definisce un prodotto scalare definito positivo. Stabilire se i quattro vettori

$$\{\underline{w}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \underline{w}_2 = (1, 1, 0, 0) \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 1, 0) \quad \underline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

costituiscono una base ortonormale di \mathbb{R}^4 dotato di questo nuovo prodotto scalare.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali di grado ≤ 2 . Definiamo un'applicazione $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right)q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1)$$

(2.1) Verificare che \langle, \rangle definisce un prodotto scalare in V . Verificare che è definito positivo.

(2.2) Calcolare $\|2 + x\|$.

(2.3) Scrivere l'espressione di questo prodotto scalare nella coordinate associate alla base $\{1, x, x^2\}$ di V determinando in particolare la matrice S associata a \langle, \rangle in tale base.

(2.4) Scrivere equazioni cartesiane, nelle coordinate associate alla base $\{1, x, x^2\}$, per il sottospazio W ortogonale al vettore $1 - x$.

(2.5) Trovare una base ortogonale di W .