Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 04/3/2016 (Primo compito)

Sia A un insieme e siano $\rho \subset A \times A$ e $\sigma \subset A \times A$ due relazioni. Abbiamo definito

$$\rho^{-1} : \{(a, b) \in A \times A \ \mid \ (b, a) \in \rho\}$$

e, utilizzando l'unione e l'intersezione insiemistica in $A \times A$, $\rho \cup \sigma$ e $\rho \cap \sigma$. Definiamo anche il prodotto di due relazioni al modo seguente:

$$\rho \circ \sigma = \{(a, b) \in A \times A \ : \ \exists c \in A \mid (a, c) \in \rho, (c, b) \in \sigma\}$$

Esercizio 1. Consideriamo $E = \{1, 2, 3\}$, E sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Consideriamo $\rho := \{(a, b) \ : \ a \leq b\}$ e $\sigma := \{(a, b) \ : \ a + b \neq 3\}$.
Descrivere esplicitamente ρ e σ elencandone gli elementi; fare lo stesso per

$$\rho \circ \sigma\,, \ \ \sigma \circ \rho\,, \ \ \rho^{-1}\,, \ \ \sigma^{-1}\,, \ \ (\rho \circ \sigma)^{-1}\,, \ \ (\sigma \circ \rho)^{-1}$$

Osservare che $\rho \circ \sigma \neq \sigma \circ \rho$. Calcolare poi $\sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$ e verificare che è uguale a $(\rho \circ \sigma)^{-1}$. Calcolare $\rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$ e verificare che è uguale a $(\sigma \circ \rho)^{-1}$. (Queste ultime due uguaglianze sono sempre vere, per ogni coppia di relazioni ρ e σ in un insieme arbitrario E.) Per ognuna delle 8 relazioni

$$\rho\,, \ \ \sigma\,, \ \ \rho \circ \sigma\,, \ \ \sigma \circ \rho\,, \ \ \rho^{-1}\,, \ \ \sigma^{-1}\,, \ \ (\rho \circ \sigma)^{-1}\,, \ \ (\sigma \circ \rho)^{-1}$$

stabilire quali fra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva sono soddisfatte.

Esercizio 2. Risolvere l'esercizio 7 del primo tutoraggio del corso di Algebra 1 da me tenuto nell'anno accademico 2011-2012. Il testo è disponibile alla pagina
`http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/9III2012.pdf`

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia W un suo sottospazio. Definiamo una relazione ρ_W come segue: $(\underline{v}, \underline{h}) \in \rho_W \Leftrightarrow \underline{v} - \underline{h} \in W$.
3.1 Verificare che ρ_W è una relazione di equivalenza.
3.2 Verificare che $[\underline{v}] = \{\underline{v} + \underline{w}, \underline{w} \in W\}$.
L'insieme quoziente V/ρ_W è denotato usualmente con il simbolo V/W. Abbiamo un'applicazione quoziente $\pi : V \to V/W$.
3.3 Definiamo un'operazione di somma in V/W come segue: $[\underline{v}] + [\underline{u}] := [\underline{v} + \underline{u}]$. Verificare che la definizione è ben posta: se $[\underline{v}] = [\underline{v}']$ e $[\underline{u}] = [\underline{u}']$ allora $[\underline{v} + \underline{u}] = [\underline{v}' + \underline{u}']$
3.4 Definiamo un'operazione di prodotto per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ in V/W come segue: $\alpha[\underline{v}] := [\alpha\underline{v}]$. Verificare che la definizione è ben posta.

Non è difficile verificare che con queste due operazioni l'insieme V/W ha una struttura di spazio vettoriale reale con elemento neutro $0_{V/W}$ dato da $[0_V]$ (che è anche uguale a $[\underline{w}]$ con $\underline{w}$ un qualsiasi vettore di W). V/W è lo *spazio vettoriale quoziente definito dal sottospazio* W.
3.5 Verificare che $\pi : V \to V/W$ è un'applicazione lineare e che $\operatorname{Ker} \pi = W$.
3.6 Con riferimento al teorema fondamentale sulle applicazioni, e alla sua dimostrazione, sia ora U un altro spazio vettoriale e sia $L : V \to U$ un'applicazione lineare. Verificare che esiste $\widetilde{L} : V/W \to U$ tale $\widetilde{L} \circ \pi = L$ se e solo se $W \subset \operatorname{Ker} L$. Sotto questa condizione è $\widetilde{L}$ lineare ?