Geometria 1

Prof. Paolo Piazza

Esercizi per la mattina del 5/6/18.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione $f(X;Y) = XY^2 - Y^4 + X^3 - 2X^2Y = 0$.
1. Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$ rispetto a X_0.
2. Stabilire se esistono asintoti.
3. Verificare che l'origine è punto singolare per $\mathcal{C}$; determinare le tangenti principali nell'origine, stabilendo quindi se essa è singolarità ordinaria o non-ordinaria.
4. Sia σ la retta di equazione $Y = 7$. Calcolare $\sum_{P\in\sigma} I(\mathcal{C},\sigma;P)$.
5. sia $P = (4,-4)$ e sia r la retta di equazione $2X + 3Y + 4 = 0$. Determinare $I(\mathcal{C}, r; P)$.

Esercizio 2. Nel piano affine complesso $A^2(\mathbb{C})$ è data la curva algebrica $\mathcal{C}_A$ di equazione $X+Y+Y^4 = 0$.
1. Scrivere l'equazione della curva algebrica $\mathcal{C}$ in $P^2(\mathbb{C})$ ottenuta per chiusura proiettiva rispetto a X_0.
2. Scrivere l'equazione della curva algebrica in $A^2(\mathbb{C}) = P^2(\mathbb{C}) \setminus H_1$, $H_1 = \{X_1 = 0\}$, ottenuta per deomogenizzazione di $\mathcal{C}$ rispetto a X_1.
3. Verificare che $\mathcal{C}$ ammette un unico punto singolare S; determinare la molteplicità di S.
4. Scrivere l'equazione di ogni tangente principale in S e per ognuna di esse la relativa molteplicità d'intersezione con la curva nel punto S. (*Suggerimento*: può essere utile utilizzare il punto **2**.)
5. Dimostrare che $\mathcal{C}$ ha un punto di flesso F nell'origine: scrivere l'equazione cartesiana della tangente τ in $(0,0)$ e verificare che $I(\mathcal{C},\tau;F) > 2$.