Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 2/4/2016

Siano $(G, \star_G)$ e $(H, \star_H)$ due gruppi. Convincetevi che il prodotto cartesiano $G \times H$ ha una naturale struttura di gruppo, $(G \times H, \star)$, rispetto all'operazione

$$(g, h) \star (g', h') := (g \star_G g', h \star_H h') .$$

$(G \times H, \star)$ è detto *prodotto diretto di G ed H*.
Siano $(A, +_A, \cdot_A)$ e $(B, +_B, \cdot_B)$ due anelli. Convincetevi che il prodotto cartesiano $A \times B$ ha una naturale struttura di anello, $(A \times B, +, \cdot)$, con le operazioni

$$(a, b) + (a', b') := (a +_A a', b +_B b') , \quad (a, b) \cdot (a', b') = (a \cdot_A a', b \cdot_B b') .$$

Se A e B sono commutativi unitari allora anche $A \times B$ lo è.

Un'applicazione $F : A \to B$ fra due anelli $(A, +_A, \cdot_A)$ e $(B, +_B, \cdot_B)$ è un omomorfismo di anelli se

$$F(a +_A a') = F(a) +_B F(a') , \quad F(a \cdot_A a') = F(a) \cdot_B F(a').$$

Scriveremo spesso $+$ e $\cdot$ per le operazioni di A e B a meno che ciò generi confusione. Si ha sempre: $F(0_A) = 0_B$ perché $0_A = a - a$ quale che sia $a \in A$ ed analogamente per B. Se A e B sono unitari allora F è detto unitario se porta 1_A in 1_B [1].
Se F è bigettiva allora F è detto un isomorfismo.

Esercizio 1. Verificare che l'elemento neutro 1 di un gruppo $(G, \star)$ è unico. Verificare che l'elemento neutro additivo 0_A e l'elemento neutro moltiplicativo 1_A di un anello commutativo unitario sono unici.
Verificare che se A e B sono anelli commutativi unitari ed F è un isomorfismo di anelli allora F è automaticamente unitario.

Esercizio 2. Verificare che se A e B sono anelli commutativi unitari ed F è un isomorfismo di anelli allora $F(\mathcal{U}(A)) = \mathcal{U}(B)$.
(Vi ricordo che $\mathcal{U}(A)$ è il gruppo degli elementi invertibili di A.) Verificare che

$$\mathcal{U}(A \times B) = \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B) .$$

Esercizio 3. Siano $r, s \in \mathbb{N}$, $r, s \geq 2$. Verificare che l'applicazione

$$F : \mathbb{Z}_{rs} \to \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$$

definita da

$$F([x]_{rs}) = ([x]_r, [x]_s)$$

è ben definita ed è un omomorfismo unitario di anelli commutativi unitari.

Esercizio 4. Verificare che se F è un isomorfismo allora il Massimo Comune Divisore fra r ed s, (r, s), è uguale ad uno.
Suggerimento: supporre per assurdo che $(r, s) = d > 1$ e verificare che se h è il minimo comune multiplo di r ed s allora $[h] \neq [0]_{rs}$ ma $F([h]_{rs}) = ([0]_r, [0]_s)$.

---

[1] Non è automatico: l'applicazione $\mathbb{R} \ni \alpha \to \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è un omomorfismo di anelli unitari ma non è unitario

Esercizio 5. Verificare che se ogni sistema cinese di 2 equazioni del tipo

$$\begin{cases} X \equiv a(r) \\ X \equiv b(s) \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione modulo rs allora F è surgettiva e quindi bigettiva (i due insiemi sono finiti). Abbiamo scritto brevemente $X \equiv a(r)$ anziché $X \equiv a \bmod r$.

Esercizio 6. Stabilire se i seguenti elementi sono invertibili ed in caso affermativo determinare l'inverso

$$\overline{3} \in \mathbb{Z}_5\,; \quad \overline{3} \in \mathbb{Z}_6\,; \quad \overline{17} \in \mathbb{Z}_{26}\,; \quad \overline{2} \in \mathbb{Z}_{2h}$$

Esercizio 7. Risolvere il sistema cinese

$$\begin{cases} X \equiv 4\,(5) \\ X \equiv 5\,(6) \\ X \equiv 6\,(7) \end{cases}$$

Esercizio 8. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4X \equiv 2\,(22) \\ 3X \equiv 2\,(7) \end{cases}$$