Corso di dottorato
K-Teoria
Compito a casa del 14/03/02 (Terzo compito)

Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; la sua trasformata di Fourier, $\hat{f}$, è la funzione

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x) dx \tag{1}$$

Verificare che $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e che per ogni multi-indice α

$$\xi^\alpha \hat{f} = \widehat{(D_x^\alpha f)}\,, \quad D_\xi^\alpha \hat{f} = (-1)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)} \tag{2}$$

Esercizio 2. La convoluzione di due funzioni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è definita come

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \tag{3}$$

Verificare che $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e che

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}\,. \tag{4}$$

Utilizzando la formula d'inversione di Fourier verificare anche che

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g} \tag{5}$$

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e consideriamo l'insieme $S^m(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito da tutte le funzioni $p(x,\xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni compatto $K \subset U$, $\forall \alpha, \forall \beta, \exists\, C_{K,\alpha,\beta}$ tale che

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \le C_{K,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

Sia $u \in C_c^\infty(U)$; definiamo

$$Pu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)\hat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi$$

Verificare che P definisce un operatore lineare

$$P : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)\,.$$

Sia $U = \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ abbia la proprietà che $\forall \alpha, \forall \beta, \exists\, C_{\alpha,\beta}$ tale che

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in \mathbb{R}^n, xi \in \mathbb{R}^n \tag{7}$$

verificare che P manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 4. Sia M una varietà differenziabile e sia $P \in \Psi^m(M)$. Vi ricordo che ciò implica che per ogni carta $\chi : \Omega \to U \subset \mathbb{R}^n$, l'operatore locale indotto A_U appartiene a $\Psi^m(U)$. Sia $x \in \Omega \subset M$; abbiamo definito il simbolo principale di A calcolato in $\sum \xi^j d\chi_j(x) \in T^*M|_\Omega$ come il simbolo pricipale di A_U calcolato in $(\chi(x), \xi) \in T^*U$. Verificare che il simbolo principale di A è globalmente definito.

Esercizio 5. Siano E,F due fibrati vettoriali su M. Sia

$$P \ : \ C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$$

un operatore differenziale di ordine k: $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$. Diamo una definizione alternativa di simbolo principale:
sia $\xi \in T^*_x M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M, E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$. Definiamo $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi) \in Hom(E_x, F_x)$ come segue :

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(x, \xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$

Verificare che $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è una applicazione lineare da E_x in F_x.
Verificare che se M è uguale ad un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e se E ed F sono i fibrati prodotto su U allora questa nozione si riduce alla usuale nozione di simbolo principale per una matrice (P_{ij}) di operatori differenziali: se

$$(P_{ij}) = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right)$$

allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}((P_{ij}))(x, \xi) = \left(\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(ij) (\xi^1)^{\alpha_1} \dots (\xi^n)^{\alpha_n} \right) .$$

Esercizio 6. Verificare che il simbolo principale dell'operatore d : $C^\infty(M, \Lambda^k M) \to C^\infty(M, \Lambda^{k+1} M)$ (differenziale esterno) è dato da

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(d)(\xi)(\omega_x) = i\xi \wedge \omega_x \quad \forall \xi \in T^*_x M \, , \forall \omega_x \in \Lambda^k_x M \, .$$

Dedurne che il complesso di de Rham è un complesso *ellittico*.

Esercizio 7. Sia M una varietà compatta e sia $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ un operatore pseudodifferenziale. Supponiamo che $\mathrm{ind}\, P = 0$.
Verificare che esiste $K \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ tale che $P + K$ si estende ad un isomorfismo $H^s(M, E) \to H^{s-m}(M, F)$ $\forall s$.
Cosa si può dire se $\mathrm{ind}\, P > 0$ (rispettivamente $\mathrm{ind}\, P < 0$) ?
Suggerimento: utilizzare la proiezione ortogonale Π su $\mathrm{Ker} P$. Verificare che $\Pi \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$. Dimostrare e utilizzare l'esistenza di un sottospazio

finito dimensionale $L \subset C^\infty(M,F)$ tale che

$$L \simeq \mathrm{coker} P\,, \qquad L \oplus \mathrm{Im}(P) = C^\infty(M,F)$$

Esercizio 8. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$, siano $\alpha(1),\dots\alpha(\ell)$ multiindici e siano $a_{\alpha(j)}(x) \in C^\infty_c(U)$, $j=1,\dots,\ell$.
Consideriamo l'operatore $P := \sum_j a_{\alpha(j)} R_{\alpha(j)}$ con

$$(R_{\alpha(j)}u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} (\frac{\xi}{|\xi|})^{\alpha(j)} \hat{u}(\xi) d\xi$$

dove

$$(\xi/|\xi|)^\beta = \frac{(\xi_1^{\beta_1}\cdots\xi_n^{\beta_n})}{|\xi|^{|\beta|}}\,.$$

Verificare che $P = A + K$ con $A \in \Psi^*(U)$ e $K \in \Psi^{-\infty}$. Determinare l'ordine di A.

Esercizio 9. Consideriamo $L^2(S^1)$ e la sua base ortonormale $\{z^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. L'espansione di una funzione f secondo questa base è la serie di Fourier di f:

$$f = \sum \hat{f}(j) z^j\,.$$

I numeri $\hat{f}(j) =< f, z^j >_{L^2}$ sono i coefficienti di Fourier di f. Consideriamo il sottospazio $H_+ := \mathrm{Span}(z^j, j \geq 0)$ e sia Π_+ la proiezione ortogonale su H_+. Se $f \in C(S^1)$ definiamo $T_f : H_+ \to H_+$ come l'operatore $\Pi_+ M_f|_{H_+}$ con M_f l'operatore di moltiplicazione per f.
9.1. Verificare che T_f è lineare e continuo.
9.2. Verificare che se $j \in \mathbb{N}$

$$(\widehat{T_f(u)})(j) = \sum_0^\infty \hat{f}(j-n)\hat{u}(n)$$

9.3. Verificare che $C(S^1) \ni f \to T_f$ definisce una mappa lineare continua fra le algebre di Banach $C(S^1)$ e $\mathcal{L}(H_+)$. Denotiamo con T questa mappa.
9.4. Sia $\mathcal{K}$ l'ideale degli operatori compatti in $\mathcal{L}(H_+) \equiv \mathcal{L}$ e sia $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ l'algebra quoziente (algebra di Calkin). Sia π la proiezione $\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{K}$. Sappiamo che un operatore T è di Fredholm se e solo se $\pi(T)$ è invertibile nell'algebra di Calkin.
Sia $f(z) = z^m$ Verificare che T_f è di Fredholm.
Suggerimento: Verificare che se $f, g \in C(S^1)$ hanno uno sviluppo di Fourier con un numero finito di termini,

$$f = \sum_{|j|\leq n} \hat{f}(j) z^j\,, \quad g = \sum_{|j|\leq m} \hat{g}(j) z^j$$

allora $T_{fg} - T_f T_g$ è un operatore di rango finito e quindi compatto. [1] Per verificare quest'ultima proprietà può essere utile fare uso dell'analogo discreto dell'Esercizio 2 e dell'esercizio 9.2. Calcolare $\pi T(1)$ con 1 uguale alla funzione costante uguale a 1. Concludere.

[1] In altre parole, per queste particolari funzioni $\pi T(fg) = \pi(T(f))\pi(T(g))$