Corso di dottorato
K-Teoria
Compito a casa del 19/02/02 (Secondo compito)

Esercizio 1. Consideriamo $\mathbb{R}P^n$ ed il fibrato universale $E_1(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{R}P^n$. Sia $U_j = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{R}P^n \mid z_j \neq 0\}$.

1.1. Determinare una banalizzazione del fibrato universale su questi intorni. Scrivere le funzioni di transizione associate:

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Consideriamo la mappa di Segre

$$\mu : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \longrightarrow \mathbb{R}P^{(n+1)(m+1)-1}$$

definita da

$$([z_0, \dots, z_n], [w_0, \dots, w_m]) \longrightarrow [z_0 w_0, z_0 w_1, \dots, z_0 w_m, z_1 w_0, \dots, \dots, z_n w_m]\,.$$

Siano $\pi_1 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$, $\pi_2 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^m$ le due proiezioni naturali.

1.2. Sia $n = 1 = m$. Analizzando le funzioni di transizione dimostrare che

$$\mu^*(E_1(\mathbb{R}^{(n+1)(m+1)})) \simeq \pi_1^*(E_1(\mathbb{R}^{n+1})) \otimes \pi_1^*(E_1(\mathbb{R}^{m+1}))\,. \tag{1}$$

1.3. (Facoltativo) Dimostrate l'isomorfismo (1) in generale.

1.4. Fare lo stesso esercizio sostituendo $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia

$$E_1(\mathbb{R}^{n+1}) \to G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}P^n = S^n/\sim$$

il fibrato universale su $\mathbb{R}P^n$; lo denotiamo semplicemente con $L_{\mathbb{R}}$. Sia $\mathbf{1}^m$ il fibrato prodotto di rango m. Sappiamo che $L_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^n$ è, per definizione, un sottofibrato di $\mathbf{1}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$ e che è ben definito $L_{\mathbb{R}}^{\perp}$, dove abbiamo utilizzato la metrica canonica in $\mathbf{1}^{n+1}$.

2.1. Verificare che esiste un isomorfismo di fibrati

$$T(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}}^{\perp})\,.$$

Suggerimento: fate prima vedere che lo spazio tangente a $\mathbb{R}P^n$ in $[x] \in \mathbb{R}P^n$ può essere identificato all'insieme delle coppie di $(n+1)-ple$

$$\{(-x, -v), (x, v)\} \text{ con } ||x|| = 1\,,\ x \perp v\,.$$

Può essere utile pensare al differenziale della proiezione canonica $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$. Poi considerate la mappa che associa a $\{\pm(x, v)\}$ l'omorfismo che vale v su $([x], x) \in (L_{\mathbb{R}})_{[x]}$.

2.2. Verificare che per ogni coppia di fibrati E, F si ha l'isomorfismo di fibrati $\mathrm{Hom}(E,F) = F \otimes E^*$. Osservare anche che

$$E \otimes \mathbf{1}^k = \oplus^k E$$

dove abbiamo utilizzato il simbolo $\oplus^k E$ per denotare la somma diretta di k copie di E.

2.3. Verificare che $\mathbf{1} \simeq \mathrm{Hom}(L,L)$ per ogni fibrato di rango 1, L.
Suggerimento: c'è una sezione naturale del fibrato a destra che non è mai nulla.

2.4. Verificare che esiste una successione esatta corta

$$0 \to L_{\mathbb{R}} \to \mathbf{1}^{n+1} \to L_{\mathbb{R}}^{\perp} \to 0$$

Verificare che per ogni fibrato reale di rango 1, L, dotato di metrica, esiste un isomorfismo naturale $L \simeq L^* := \mathrm{Hom}(L, \mathbf{1})$.

2.4. Utilizzando le informazioni precedenti verificare che esiste un isomorfismo di fibrati

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbf{1} \simeq \oplus^{n+1} L_{\mathbb{R}} \tag{2}$$

Suggerimento: tensorizzare in maniera opportuna la successione esatta...

Esercizio 3. Consideriamo il caso complesso dell'esercizio precedente. Sia $L_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^n$ il fibrato universale e consideriamo $L_{\mathbb{C}}^{\perp} \to \mathbb{C}P^n$, il suo ortogonale in $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}^{n+1}$.

3.1. Verificare che per il fibrato tangente $T(\mathbb{C}P^n)$ vale il seguente isomorfismo:

$$T(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}}^{\perp})\,.$$

Suggerimento: fissiamo $\ell \subset \mathbb{C}^{n+1}$, un sottospazio vettoriale di dimensione 1 in $\mathbb{C}^{n+1}$. Pensando all'esercizio 5 del primo compito (esteso in maniera banale al caso complesso), con chi possiamo identificare lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(\ell, \ell^{\perp})$? Sulla base di questa identificazione, dimostrate che $T_{[\ell]}\mathbb{C}P^n \simeq \mathrm{Hom}(\ell, \ell^{\perp})$.
A questo punto dimostrate che esiste un isomorfismo di fibrati $T\mathbb{C}P^n \simeq \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{C}}^{\perp})$.

3.2. Procedendo come nell'esercizio 2, verificare che esiste un isomorfismo di fibrati

$$T\mathbb{C}P^n \oplus \mathbf{1}_{\mathbb{C}} \simeq \oplus^{n+1} (L_{\mathbb{C}})^* \tag{3}$$

Esercizio 4.

4.1. Dare un esempio esplicito dal quale si deduca che nel semigruppo Vect( ) *non* vale la legge di cancellazione.
Suggerimento. Si utilizzi l'esercizio 4 del primo compito.

4.2 Sia Y un sottospazio chiuso di uno spazio compatto X, sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione e sia $r : X \to Y$ una retrazione: $r \circ i = \mathrm{id}_Y$. Verificare che esiste una successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow K(X,Y) \to K(X) \to K(Y) \to 0$$

indotta da $j : (X, \emptyset) \to (X,Y)$ e $i : Y \hookrightarrow X$. Verificare che $K(X) = A \oplus B$ con $A = j^* K(X,Y)$ e $C = r^* K(Y)$ e che quindi $K(X) \simeq K(X,Y) \oplus K(Y)$.

Esercizio 5. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale complesso e sia h una metrica hermitiana su E.
5.1. Verificare che $(E^{\perp} \to X)$ è un fibrato vettoriale.
5.2. Sia G un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{C})$. Diremo che il gruppo di struttura di $(E \to X)$ può essere ridotto a G se esiste un ricoprimento banalizzante $\{U_{\alpha\beta}\}$ e funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ per E a valori in G. Verificare che il gruppo di struttura di $(E \to X)$ può essere sempre ridotto a $U(n)$.

Esercizio 6. Sia X uno spazio compatto.
Consideriamo il gruppo $[X, GL(\infty, \mathbb{C})]$ [1]. C'è una naturale mappa di insiemi

$$[X, GL(\infty, \mathbb{C})] \to \widetilde{K}(SX)$$

ottenuta associando a $A \in [X, GL(N, \mathbb{C})]$ la classe $[E_A] - [\mathbf{1}^N] \in \widetilde{K}(SX)$. Vi rimando al Riassunto dell lezione n. 2 per la definizione di questa mappa [2].
Dimostrare che questa mappa è un *isomorfismo di gruppi.*
Suggerimento: la struttura di gruppo in $[X, GL(\infty, \mathbb{C})]$ è indotta da quella del gruppo $GL(\infty, \mathbb{C})$.
Utilizzare la seguente osservazione:
se $A, B \in GL(k, \mathbb{C})$ allora la curva di matrici in $GL(2k, \mathbb{C})$ definita da

$$C_t := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

per $t \in [0, \pi/2]$, unisce

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}.$$

---

[1] Consultare il *Riassunto delle lezione n. 2* per la definizione di $GL(\infty, \mathbb{C})$

[2] Attenzione, nell'enunciato della Proposizione 3 si legga $\mathrm{Vect}_k(SX)$ nella formula (1)