Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L + Gruppo M-Z
Esame del 19/02/02

Esercizio 1. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico.
1.1. Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di proiezione ortogonale sul sottospazio W di equazioni cartesiane $x_1 + x_4 = 0$.
1.2. Determinare le equazioni cartesiane di $W^\perp$
1.3. Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di riflessione rispetto a $W^\perp$ (detto anche operatore di simmetria ortogonale rispetto a $W^\perp$).

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Verificare che A non è diagonalizzabile né in $\mathbb{R}$, né in $\mathbb{C}$. Determinare una matrice invertibile $C \in GL(4, \mathbb{R})$ tale che $C^{-1}AC$ sia triangolare superiore.

Esercizio 3. Piano euclideo con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, \underline{i}, \underline{j})$ e coordinate associate (x, y).
3.1 Verificare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + 10xy + 14\sqrt{2}x + 22\sqrt{2}y + 52 = 0$$

è un'iperbole.
3.2 Determinare l'equazione canonica di $\mathcal{C}$ ed il cambiamento di coordinate che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica.
3.3. Determinare, nel riferimento $RC(O, \underline{i}, \underline{j})$ l'equazione cartesiana degli asintoti e le coordinate dei vertici. Determinare anche la distanza fra i fuochi dell'iperbole $\mathcal{C}$.

Esercizio 4. Nel riferimento affine $RA(O, x, y, z)$ sia C il cono di quazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

e sia $H_{\lambda,\mu}$, per $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, il piano di equazione cartesiana

$$\lambda y + \mu(z - 1) = 0.$$

(Quindi $H_{\lambda,\mu}$ appartiene a un fascio di piani.) Determinare il tipo affine della conica $C \cap H_{\lambda,\mu}$ al variare di (λ, μ).
Suggerimento:
come si trova l'intersezione ? Come ci si può ridurre a due variabili ?

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale reale i cui elementi sono i polinomi in una variabile di grado al più due, e sia $< \cdot, \cdot >$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[x]$ definito da

$$< f, g >:= f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

5.1. Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ per ottenere una base ortonormale dello stesso spazio.

5.2. Dare un'isometria

$$\phi \colon (\mathbb{R}_2[x], < \cdot, \cdot >) \xrightarrow{\sim} \left(\mathbb{R}^3, < \cdot, \cdot >_{st}\right),$$

dove $< \cdot, \cdot >_{st}$ é il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ siano p_1, p_2, p_3, p_4 i punti dati da

$$p_1 = [1, 0], \quad p_2 = [3, 4], \quad p_3 = [2, 1], \quad p_4 = [4, 5].$$

6.1. Determinare la proiettivitá $f \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che

$$f(p_1) = p_2, \quad f(p_2) = p_1, \quad f(p_3) = p_4, \quad f(p_4) = p_3.$$

6.2. Dire se esiste una proiettivitá $g \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che

$$g(p_1) = p_2, \quad g(p_2) = p_3, \quad g(p_3) = p_4, \quad g(p_4) = p_1.$$