GEOMETRIA I (2^o MODULO), A.A. 2001/02, ESAME SCRITTO

PROFF. O'GRADY E PIAZZA

29 Gennaio 2002

1. Sia $H \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio lineare definito dall'equazione cartesiana

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Calcolare la matrice 4×4 associata, nella base canonica, all'operatore di riflessione (ovvero simmetria) ortogonale rispetto ad H. S'intende che la riflessione (ovvero simmetria) è fatta rispetto al prodotto scalare standard.

2. Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile a coefficienti reali, con prodotto scalare definito da

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx.$$

Sia $\mathbf{v} := 1 - x^2$, e $V \subset \mathbb{R}_2[x]$ il sottospazio ortogonale a $\mathbf{v}$. Determinare una base di V ortonormale per il prodotto $\langle , \rangle$.

3. Spazio euclideo con riferimento ortonormale $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e coordinate associate (x, y, z). Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la sfera di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3,$$

e $L \subset \mathbb{R}^3$ la retta passante per il punto $(3, 0, 1)$, con direzione individuata da $(1, 2, 3)$. Determinare l'equazione cartesiana dei piani contenenti L e tangenti a S.

4. Piano Euclideo con riferimento ortonormale $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ e coordinate associate (x, y). La conica C di equazione cartesiana

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y + 14 = 0$$

è un'iperbole. Determinare un cambiamento di riferimento ortonormale che la porti in forma canonica metrica, e calcolare le coordinate dei fuochi nel sistema di riferimento $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

5. Spazio Affine con riferimento affine $RA(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e coordinate associate (x, y, z). Determinare un sistema di riferimento affine che porti in forma canonica la quadrica di equazione cartesiana

$$2xy + 2xz + 2yz = 1.$$

6. Piano proiettivo con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$. Sia $t \in \mathbb{R}$ e si consideri la conica C_t di equazione cartesiana omogenea

$$X_1^2 - 2X_2^2 - X_0X_2 + t(X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 + X_0X_2) = 0.$$

Determinare il tipo della conica al variare di t.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX