Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L + Gruppo M-Z
Prova scritta del 16/01/02

Esercizio 1. Piano euclideo con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O\underline{i}\underline{j})$ e coordinate associate (x, y). Sia $\mathcal{C}$ il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano:

$$2x^2 + 5y^2 + 4xy + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0 \tag{1}$$

(1.1) Determinare un cambiamento di riferimento ortonormale che porti $\mathcal{C}$ in forma canonica. Verificare in tal modo che $\mathcal{C}$ è un'ellisse reale.

Nel riferimento $RC(O\underline{i}\underline{j})$
(1.2) Determinare l'equazione cartesiana della retta contenente il semiasse maggiore.

Esercizio 2. Spazio euclideo con riferimento ortonormale $RC(O\underline{i}\underline{j}\underline{k})$ e coordinate associate (x, y, z). Sia Σ il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0.$$

(2.1) Verificare che Σ è una sfera, determinandone il centro ed il raggio.
(2.2) Verificare che il piano π di equazione $x + y + z + 1 = 0$ è secante Σ.
(2.3) Determinare il centro ed il raggio della circonferenza $\pi \cap \Sigma$.
(2.4) Determinare i piani paralleli a π e tangenti Σ.

Esercizio 3. Spazio affine con riferimento $RA(0\underline{i}\underline{j}\underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z). È data la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione cartesiana:

$$x^2 + yz + x = 0 \tag{2}$$

(3.1) Determinare il tipo di quadrica.
(3.2) Dal punto (3.1) segue che $\mathcal{Q}$ è doppiamente rigata; determinare equazioni parametriche per almeno una delle due rette r_1, r_2 contenute in $\mathcal{Q}$ e passanti per $P_0 = (-1, 0, 0) \in \mathcal{Q}$.
(3.3) Scrivere le equazioni di un cilindro dello spazio che *non* abbia alcun punto reale a comune con la quadrica $\mathcal{Q}$.

Esercizio 4. Piano proiettivo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ con coordinate proiettive omogenee (X_0, X_1, X_2).

(4.1) Determinare l'equazione cartesiana omogenea per la retta passante per i punti P e Q di coordinate rispettivamente $[1, 0, 2]$ e $[0, 1, 1]$.
(4.2) Consideriamo i punti

$$P_0' = [1, 2, 1]\,,\ \ P_1' = [2, 0, 1]\,,\ \ P_2' = [1, -2, 0]\,,\ \ U' = [1, 0, 0].$$

Stabilire se esistono coordinate proiettive omogenee (Y_0, Y_1, Y_2) tali che i 4 punti dati abbiano coordinate rispettivamente

$$(1, 0, 0)\,,\ \ (0, 1, 0)\,,\ \ (0, 0, 1)\,,\ \ (1, 1, 1)$$

Detto diversamente: stabilire se i quattro punti dati possono essere assunti come i punti fondamentali di un nuovo riferimento proiettivo.

Esercizio 5. Retta proiettiva $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ con coordinate omogenee (X_0, X_1). Sono date le seguenti quaterne di punti:

$P_1 = [1,1]$, $P_2 = [2,0]$, $P_3 = [1,-1]$, $P_4 = [4,2]$.
$Q_1 = [1,-1]$, $Q_2 = [1,1]$, $Q_3 = [1,0]$, $Q_4 = [-2,6]$.
$S_1 = [1,2]$, $S_2 = [1,-1]$, $S_3 = [2,0]$, $S_4 = [1,3]$.

Dire quali fra queste quaterne sono proiettivamente equivalenti ed in caso affermativo determinare la proiettività che muta una quaterna nell'altra.