Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L (Prof. P. Piazza)

Complementi di geometria proiettiva

Definizione. Consideriamo la retta proiettiva $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ e siano P_1, P_2, P_3, P_4 quattro punti in $\mathbb{P}^1$, di cui i primi tre distinti. Consideriamo il riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^1$ che ha P_1, P_2 come punti fondamentali e P_3 come punto unità. Siano $[y_0, y_1]$ le coordinate omogenee di P_4 rispetto a tale riferimento. Il birapporto di P_1, P_2, P_3, P_4 è

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = y_1/y_0 \in \mathbb{R} \cup \infty$$

e cioè la coordinata non-omogenea di P_4 rispetto a tale riferimento .

Analogamente si definisce il birapporto di 4 punti allineati in $\mathbb{P}^r$, di cui i primi 3 distinti: se $P_1 = [\underline{v}_1]$, $P_2 = [\underline{v}_2]$, $P_3 = [\underline{v}_1 + \underline{v}_2]$, $P_4 = [\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2]$, allora $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta/\alpha$.

Proposizione. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 e Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 due quaterne di $\mathbb{P}^1$ con P_1, P_2, P_3 distinti e Q_1, Q_2, Q_3 distinti. Esiste una proiettività $\pi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che $\pi(P_j) = Q_j$ $\forall j$ se e solo se $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.
La dimostrazione, che non è difficile, è omessa (si veda ad esempio E. Sernesi, Geometria 1, pag. 325, Ed. Boringhieri).

Supponiamo che i punti P_j abbiano coordinate omogenee, rispetto ad un preesistente riferimento proiettivo, date da $P_j = [\lambda_j, \mu_j]$. Allora è facile vedere che

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}$$

oppure in coordinate non-omogenee $z_j = \mu_j/\lambda_j$

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}$$

Un'applicazione $\pi : \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^r$ è per definizione una collineazione se è biettiva e se conserva gli allineamenti nei due versi (π e π^{-1} mutano rette in rette). È possibile dimostrare il seguente

Teorema. Sia $\pi : \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^r$ una biezione. Le seguenti sono equivalenti:

(i) π è una proiettività.

(ii) π è una collineazione e conserva i birapporti.

La dimostrazione dell'implicazione $(i) \to (ii)$ è semplice; quella dell'implicazione inversa è un pò più complicata. Le omettiamo entrambe.