Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L + Gruppo M-Z
Esercizi per casa del 2/11/01

Esercizio 1. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata e coordinate associate (x_1, x_2, x_3, x_4).
Si consideri il sottospazio W di equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Scrivere la matrice associata nella base canonica all'operatore di simmetria ortogonale rispetto al sottospazio W.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale 2. Sia

$$<,>: V \times V \to \mathbb{R}$$

l'applicazione definita da

$$<p, q> := \int_{-1}^{1} pq dx.$$

Abbiamo verificato che questa applicazione definisce un prodotto scalare in V.
(2.1) Scrivere l'espressione di questo prodotto scalare nelle coordinate (p_0, p_1, p_2) associate alla base $\{1, X, X^2\}$. Quindi

$$<p, q> = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{vmatrix}$$

e il problema è determinare A (si veda Abeasis, Vol. 1, pag 244).
(2.2) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $W := (\mathbb{R}(1+X))^{\perp}$. Determinare una base ortogonale di W.

Esercizio 3. $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4).
Sia W il sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\underline{g}_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad \underline{g}_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Si consideri il vettore

$$\underline{h}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Sia U il sottospazio generato dai vettori $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{h}_1$.
(3.1). Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W.
(3.2). Sia $\underline{h}_2$ l'unico vettore generatore di $U^{\perp}$ verificante le due condizioni

$$||\underline{h}_2|| = 1 \qquad <\underline{h}_2, \underline{e}_2> > 0.$$

Determinare le coordinate di $\underline{h}_2$.
(3.3). Verificare che $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ costituiscono una base ortogonale di $W^{\perp}$.
(3.4). Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito come segue

(i) W e $W^{\perp}$ sono sottospazi invarianti per T.

(ii) $T|_W$= proiezione ortogonale sul vettore $\underline{g}_1$

(iii) $T|_{W^{\perp}}$ ha la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_1 + \underline{h}_2)$ come nucleo e la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_2 - \underline{h}_1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.

Spiegare perché T è ben definito. Determinate la matrice associata a T nella base canonica. (Suggerimento: esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice associata all'operatore T è particolarmente semplice...)
(3.5). Verificare che il sottospazio V di equazioni

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

è invariante per T. Dire se T ristretto a V è iniettivo.

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinare una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$ sia triangolare superiore.

Esercizio 5. Sia

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determinare una matrice ortogonale O tale che $O^{-1}AO$ sia triangolare superiore.

Esercizio 6. Sia

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinare una matrice ortogonale O tale che $O^{-1}AO$ sia diagonale.