SOLUZIONI DELL'ESAME DI GEOMETRIA I

K. O'Grady, P. Piazza, R. Salvati Manni

7 Febbraio 2001

1. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento affine. Determinare equazioni parametriche della retta r passante per il punto $P(1,1,2)$, parallela al piano π di equazione cartesiana

$$x + 2y + z = 3$$

e incidente la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2t \\ z &= -1 - 2t. \end{aligned}$$

Risoluzione. I piani paralleli a π sono dati dall'equazione cartesiana $x + 2y + z = k$, dove k è una costante arbitraria. Imponendo che contenga P, otteniamo che il piano per P parallelo a π ha equazione

$$x + 2y + z = 5.$$

L'intersezione con la retta s è il punto

$$Q(8/3, 10/3, -13/3).$$

Quindi la retta r è la retta per P e Q. Un calcolo dà equazioni parametriche di r:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{5}{3}u \\ y &= 1 + \frac{7}{3}u \\ z &= 2 - \frac{19}{3}u. \end{aligned}$$

2. Sia $RO(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento ortonormale. Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2t \\ z &= -1 - 2t. \end{aligned}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione

$$x - y - z = 3.$$

Risoluzione. Risolvendo per la variabile t nelle equazioni parametriche di s otteniamo equazioni cartesiane per s:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 \\ 2x + z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Quindi i piani per s hanno equazioni cartesiane

$$\lambda(2x - y - 2) + \mu(2x + z - 1) = 0,$$

dove $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Imponendo che il piano sia perpendicolare a σ otteniamo l'equazione

$$3\lambda + \mu = 0.$$

Quindi il piano cercato ha equazione cartesiana

$$4x + y + 3z - 1 = 0.$$

3. Sia F_A l'applicazione lineare definita da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{F_A} & \mathbb{R}^4 \\ X & \mapsto & A \cdot X \end{array},$$

dove

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base per il nucleo di F_A e una base per l'immagine di F_A.

Risoluzione. Applicando l'eliminazione di Gauss si trova che

$$\ker(F_A) = \{(t,t,t,t)\},$$

e quindi una (possibile) base di $\ker(F_A)$ è data da $(1,1,1,1)$. Come base di $\mathrm{im}(A)$ si può prendere una qualsiasi terna di colonne di A

4. Sia V lo spazio vettoriale reale $\mathcal{V}_O$ e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una sua base ortonormale fissata. Sia $\mathbf{w} := \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_O & \xrightarrow{F} & \mathcal{V}_O \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \end{array}.$$

4.1. Determinare la matrice associata a F nella base fissata.

Risoluzione. Un calcolo (semplice) dà che la matrice associata a F è

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Determinare gli autovalori di F.

Risoluzione. Il polinomio caratteristico di M è dato da

$$p_M(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda$$

e quindi c'è un solo autovalore, dato da $\lambda = 0$.

4.3. Stabilire se F è diagonalizzabile. Giustificare la risposta.

Risoluzione. Siccome c'è un solo autovalore di M (cioè $\lambda = 0$), ed ha molteplicitá algebrica 1, la F non é diagonalizzabile.

5.

5.1. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ammette i vettori $\mathbf{w}_1 = (2,1)$ e $\mathbf{w}_2 = (1,2)$ come autovettori associati agli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ rispettivamente, e che quest'applicazione lineare è unica.

Risoluzione. L'applicazione esiste ed è unica perché $\{(2,1), \quad (1,2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

5.2. Determinare la matrice associata ad F nella base standard.

Risoluzione. Siccome

$$(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2),$$
$$(0,1) = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2),$$

abbiamo per linearità che

$$F(1,0) = (\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}),$$
$$F(0,1) = (\frac{4}{3}, \frac{11}{3})$$

e quindi la matrice associata a F nella base standard è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \\ -4/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

6. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false (giustificando le risposte):

6.1. $\det(-A) = -\det A$ per ogni $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Risoluzione. FALSO: in verità $\det(-A) = (-)^n \det A$.

6.2. $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$, per ogni $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Risoluzione. FALSO: per esempio se

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha che $\det A = \det B = 0$, ma $\det(A+B) = 1$.

6.3. $\det(AB) = \det(BA)$, per ogni $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Risoluzione. VERO: per la formula di Binet e la commutatività del prodotto tar numeri reali

$$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B) = (\det B)\cdot(\det A) = \det(BA).$$

6.4. $P_A(\lambda) = P_{-A}(\lambda)$, per ogni $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Risoluzione. FALSO: abbiamo

$$p_A(\lambda) = \lambda^n - Tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots$$

Siccome $Tr(-A) = -Tr(A)$, vediamo che $P_A(\lambda) \neq P_{-A}(\lambda)$.

6.5. Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.

Risoluzione. FALSO: la matrice 2×2 che rappresenta una rotazione del piano, di angolo diverso da un multiplo intero di π, non ha autovalori, e quindi non é diagonalizzabile.