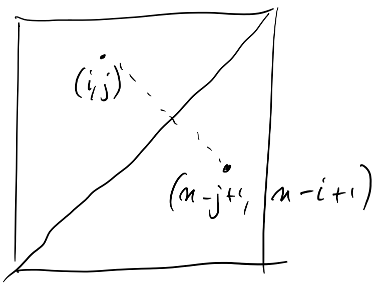
Es.1: 1) $so(n, J_0) = \{ A \overset{gl(n)}{\in} \mid A$ è $\overset{\text{anti}}{\text{simm.}}$ rispetto alla diag. secondaria $\}$

Sia $K \supseteq H$ abeliana, sia $x \in K$. Consid. la base di $so(n, J_0)$ formata da $e_{ij} - e_{n-j+1,\, n-i+1} = S_{ij}$ con $i+j < n+1$ (da cui segue $n-j+1+n-i+1 > n+1$)



Dato $y \in H$, y è della forma

$$y = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a_i = -a_{n-i+1}$$

(cioè $a_1 = -a_n$
$a_2 = -a_{n-1}$
ecc...)

Vale $[y, e_{ij}] = (a_i - a_j)\, e_{ij}$

$$[y, S_{ij}] = (a_i - a_j)\, e_{ij} - (\underbrace{a_{n-j+1}}_{=\, -a_j} - \underbrace{a_{n-i+1}}_{=\, -a_i})\, e_{n-j+1,\, n-i+1} =$$

$$= (a_i - a_j)\, S_{ij}$$

Quindi gli S_{ij} sono autovettori simultanei per tutta H.

Scriviamo $x \in K$ come comb. lin. degli S_{ij}:

$$x = \underbrace{\sum_{\substack{i=j \\ i+j<n+1}} c_{ij} \overbrace{S_{ij}}^{\in H}}_{\in H} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i+j<n+1}} c_{ij} S_j$$

Visto che K è abeliana vale $[Y,x]=0$, d'altronde

$$0=[Y,x]=\sum_{i=j} c_{ij}\underbrace{[Y,s_{ij}]}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}+\sum_{\substack{i\neq j\\ i+j<n+1}} c_{ij}\underbrace{[Y,s_{ij}]}_{\substack{\shortparallel\\ (a_i-a_j)s_{ij}}}$$

Per ogni $i\neq j$, $i+j<n+1$ esiste Y come sopra tale che $a_i-a_j\neq 0$, quindi $c_{ij}=0$ $\forall i,j$ con $i\neq j$ e $i+j<n+1$.

Concludiamo: $x\in H$.

2) $sp(n,J_1)=\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ C & -\tilde{A}\end{pmatrix} \;\middle|\; A,B,C\in gl(n/2)\right.$ $\tilde{A}$ = trasp. di A rispetto alla diag. sec., B e C simm rispetto alla —"— $\}$

Il ragionam. è simile a $so(n,J_0)$, usando

$$s_{ij}=e_{ij}\pm e_{n-j+1,\,n-i+1}$$

che sono autovett. di $Y=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}\in H$ di autoval.

a_i+a_{n-i+1}.

3) $sl(n)$: simile, usando $s_{ij}=e_{ij}$ con $i\neq j$, che hanno autoval. a_i-a_j

Es. 2: Sia $x\in H'\setminus\{0\}$ semisemplice, allora è diagonalizzabile: $\exists g\in GL(2)\,|$

$Y=gxg^{-1}=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$. D'altronde $tr(x)=0 \Rightarrow tr(gxg^{-1})=0$,

cioè $Y=\begin{pmatrix} a & \\ & -a\end{pmatrix}\in H$. Ora: tutti gli elem. di H'

commutano, quindi si diagonalizzano simultaneamente. In altre parole, esiste un <u>singolo</u> $g \in Gl(2)$ tale che gxg^{-1} è in H $\forall x \in H'$. Cioè $gH'g^{-1} \subseteq H$, da cui segue $\dim(gH'g^{-1}) \leq 1$, e concludiamo $\dim(gH'g^{-1}) = 1$ perché $H' \neq \{0\}$. Segue $gH'g^{-1} = H$.

<u>Es. 3</u>: $\mathfrak{sl}(n)$: $\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$

$\mathfrak{sp}(2n)$: $\Phi = \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i\}$ $\qquad i,j \in \{1, \dots, n\}$

$\mathfrak{so}(2n)$: $\Phi = \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ $\qquad$ (i segni $\pm$ sono tutti scelti in modo indipendente gli uni dagli altri)

$\mathfrak{so}(2n+1)$: $\Phi = \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm \varepsilon_i\}$

$$\mathfrak{so}(2n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\tilde{A} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{A} = \text{trasp. di } A \text{ rispetto alla diag. second.} \\ B, C \text{ antisimm. ——, ——} \end{array} \right\}.$$

$$\mathfrak{so}(2n+1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} A & v & B \\ \hline w & 0 & -{}^t v \\ \hline C & -{}^t w & -\tilde{A} \end{array}\right) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{——, ——} \\ v, w \text{ qualsiasi} \end{array} \right\}$$

<u>Vediamo $\mathfrak{sl}(n)$</u>:

$$(\underbrace{\varepsilon_i - \varepsilon_j}_{= \alpha_{ij}}, \varepsilon_l - \varepsilon_r) = \begin{cases} 2 & \text{se } \varepsilon_i - \varepsilon_j = \varepsilon_l - \varepsilon_r \\ 1 & \text{se } i = l \text{ e } j \neq r \text{ opp. } j = r \text{ e } i \neq l \\ -1 & \text{se } \left[\begin{array}{l} i = r \text{ e } j \neq l \text{ opp.} \\ j = l \text{ e } i \neq r \end{array}\right. \\ -2 & \text{se } \varepsilon_i - \varepsilon_j = -(\varepsilon_l - \varepsilon_r) \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

Quindi $\langle \alpha_{ij}, \alpha_{\ell r}^\vee \rangle = \dfrac{2(\alpha_{ij}, \alpha_{\ell r})}{\underbrace{(\alpha_{\ell r}, \alpha_{\ell r})}_{=2}} = (\alpha_{ij}, \alpha_{\ell r}) \in \mathbb{Z}$

Nei 4 casi: <u>quando fa 2:</u> $s_{\alpha_{ij}}(\alpha_{ij}) = -\alpha_{ij} \in \Phi$

<u>Quando fa 1:</u> $s_{\alpha_{ij}}(\alpha_{ir}) = \alpha_{ir} - \alpha_{ij} = \cancel{\varepsilon_i} - \varepsilon_r - (\cancel{\varepsilon_i} - \varepsilon_j) =$

$j \neq r$

$= \varepsilon_j - \varepsilon_r \in \Phi$

opp. $s_{\alpha_{ij}}(\alpha_{\ell j}) = \alpha_{\ell j} - \alpha_{ij} = \varepsilon_\ell - \cancel{\varepsilon_j} - (\varepsilon_i - \cancel{\varepsilon_j})$

$i \neq \ell$

$= \varepsilon_\ell - \varepsilon_i \in \Phi$

<u>Quando fa -1 e -2:</u> basta usare $\alpha_{r\ell}$ invece di $\alpha_{\ell r}$ e concludere $s_{\alpha_{ij}}(\alpha_{\ell r}) \in \Phi$

<u>Quando fa 0:</u> $s_{\alpha_{ij}}(\alpha_{\ell r}) = \alpha_{\ell r} \in \Phi$

Gli assiomi di sist. di radici sono soddisfatti.

<u>Vediamo $\mathfrak{so}(2n)$:</u> $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ e $\alpha_{\ell r} = \varepsilon_\ell - \varepsilon_r$: come per $\mathfrak{sl}(n)$

Altre radici: $\pm\beta_{ij}$ con $\beta_{ij} = \varepsilon_i + \varepsilon_j$.

$$(\beta_{ij}, \beta_{\ell r}) = (\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_\ell + \varepsilon_r) = \begin{cases} 2 & \text{se } \{i,j\} = \{\ell, r\} \\ 1 & \text{se } |\{i,j\} \cap \{\ell, r\}| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(è superfluo consid. $-\beta_{ij}$, basta la verifica con β_{ij})

$$(\beta_{ij}, \alpha_{lr}) = (\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_l + \varepsilon_r) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{l,r\},\ j \notin \{l,r\} \\ -1 & \text{se } j \in \{l,r\},\ i \notin \{l,r\} \\ 0 & \text{se } |\{i,j\} \cap \{l,r\}| = 0 \text{ opp. } 2 \end{cases}$$

Anche qui $(\beta_{ij}, \beta_{ij}) = 2$ quindi $\langle \text{radice}, \text{radice}^\vee \rangle = (\text{radice}, \text{radice})$

Calcoliamo $s_{\beta_{ij}}(\beta_{lr})$:

Quando il prod. è 2: $s_{\beta_{ij}}(\beta_{ij}) = -\beta_{ij} \in \Phi$

— , — è 1: $s_{\beta_{ij}}(\beta_{il}) = \cancel{\varepsilon_i} + \varepsilon_l - (\cancel{\varepsilon_i} + \varepsilon_j) =$
$j \neq l$
$= \varepsilon_l - \varepsilon_j \in \Phi$

$s_{\beta_{ij}}(\beta_{jr})$ analogo

Calcoliamo $s_{\beta_{ij}}(\alpha_{lr})$:

Caso $(-,-) = 1$: $s_{\beta_{ij}}(\alpha_{ir}) = \cancel{\varepsilon_i} - \varepsilon_r - (\cancel{\varepsilon_i} + \varepsilon_j) = -\varepsilon_j - \varepsilon_r \in \Phi$
$j \neq r$

$s_{\beta_{ij}}(\alpha_{li})$ analogo

Caso $(-,-) = -1$: scambiamo l con r

Calcoliamo $s_{\alpha_{ij}}(\beta_{lr})$:

Caso $(-,-) = 1$: $s_{\alpha_{ij}}(\beta_{ir}) = \cancel{\varepsilon_i} + \varepsilon_r - (\cancel{\varepsilon_i} - \varepsilon_j) = \varepsilon_r + \varepsilon_j \in \Phi$
$j \neq r$

$$s_{\alpha_{ij}}(\beta_{\ell i}) \quad \text{analogo}$$

$\ell \neq j$

<u>Vediamo $so(2n+1)$:</u> α_{ij}, $\beta_{\ell r}$: come per $so(2n)$

In più abb. $\pm\varepsilon_i$, di norma 1 (invece che $\sqrt{2}$ come le altre).

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$$

(è superfluo consid. $-\varepsilon_i$, basta fare le verifiche con ε_i)

$$(\varepsilon_i, \alpha_{\ell r}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=\ell \\ -1 & \text{se } i=r \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

$$(\varepsilon_i, \beta_{\ell r}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{\ell, r\} \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

La cosa diversa risp. a prima è: $< x, \varepsilon_i^\vee > = \dfrac{2(x, \varepsilon_i)}{(\varepsilon_i, \varepsilon_i)} = \boxed{= 2(x, \varepsilon_i)}$

<u>Calcoliamo $s_{\alpha_{ij}}(\varepsilon_\ell)$:</u>

Caso $(-,-)=1$: $s_{\alpha_{ij}}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i - \overbrace{< \varepsilon_i, \alpha_{ij}^\vee >}^{1}\alpha_{ij} =$

$$= \cancel{\varepsilon_i} - (\cancel{\varepsilon_i} - \varepsilon_j) =$$

$$= \varepsilon_j \in \Phi$$

Caso $(-,-)=-1$: analogo

<u>Calcoliamo $s_{\beta_{ij}}(\varepsilon_\ell)$</u>

Caso $(-,-)=1$: $s_{\beta_{ij}}(\varepsilon_i) = \cancel{\varepsilon_i} - \cancel{\varepsilon_i} + \varepsilon_j = \varepsilon_j \in \Phi$

$s_{\beta_{ij}}(\varepsilon_j)$: analogo

<u>Calcoliamo $s_{\varepsilon_i}(\alpha_{lr})$</u>

Caso $(-,-)=1$; $s_{\varepsilon_i}(\alpha_{ir}) = \alpha_{ir} - \langle \alpha_{ir}, \varepsilon_i^\vee \rangle \varepsilon_i =$

$= \varepsilon_i - \varepsilon_r - 2\varepsilon_i = -\varepsilon_i - \varepsilon_r$

$\in \Phi$

Caso $(-,-)=-1$; analogo

<u>Calcoliamo $s_{\varepsilon_i}(\beta_{lr})$</u>

Caso $(-,-)=1$: $s_{\varepsilon_i}(\beta_{ir}) = \beta_{ir} - \langle \beta_{ir}, \varepsilon_i^\vee \rangle \varepsilon_i =$

$= \varepsilon_i + \varepsilon_r - 2\varepsilon_i = -\varepsilon_i + \varepsilon_r \in \Phi$

$s_{\varepsilon_i}(\beta_{li})$ analogo

<u>Vediamo $sp(2n)$</u>: Differenza con $so(2n+1)$: c'è $\pm 2\varepsilon_i$ invece che $\pm\varepsilon_i$.

$$(2\varepsilon_i, \alpha_{lr}) = \begin{cases} 2 & \text{se } i=l \\ -2 & \text{se } i=r \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

$$(2\varepsilon_i, \beta_{lr}) = \begin{cases} 2 & \text{se } i\in\{l,r\} \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

Inoltre $2\varepsilon_i$ ha norma 2, quindi $\langle x, (2\varepsilon_i)^\vee \rangle = \frac{2(x, 2\varepsilon_i)}{(2\varepsilon_i, 2\varepsilon_i)} = \frac{1}{2}(x, 2\varepsilon_i)$

Calcoliamo $s_{\alpha_{ij}}(2\varepsilon_\ell)$:

Caso $(-,-)=2$: $s_{\alpha_{ij}}(2\varepsilon_i)=2\varepsilon_i-\langle 2\varepsilon_i,\alpha_{ij}^\vee\rangle\alpha_{ij}=$

$$=\cancel{2\varepsilon_i}-2(\cancel{\varepsilon_i}-\varepsilon_j)=$$

$$=2\varepsilon_j \in \Phi$$

Caso $(-,-)=-2$: analogo

Calcoliamo $s_{\beta_{ij}}(2\varepsilon_\ell)$:

Caso $(-,-)=2$: $s_{\beta_{ij}}(2\varepsilon_i)=2\varepsilon_i-\langle 2\varepsilon_i,\beta_{ij}^\vee\rangle\beta_{ij}=$

$$=\cancel{2\varepsilon_i}-2(\cancel{\varepsilon_i}+\varepsilon_j)=$$

$$=-2\varepsilon_j \in \Phi$$

Calcoliamo $s_{2\varepsilon_i}(\alpha_{\ell r})$:

Caso $(-,-)=2$: $s_{2\varepsilon_i}(\alpha_{ir})=\alpha_{ir}-\dfrac{2(2\varepsilon_i,\alpha_{ir})}{(2\varepsilon_i,2\varepsilon_i)}2\varepsilon_i=$

$$=\varepsilon_i-\varepsilon_r-\frac{4}{4}(2\varepsilon_i)=-\varepsilon_i-\varepsilon_r\in\Phi$$

Caso $(-,-)=-2$: analogo

Calcoliamo $s_{2\varepsilon_i}(\beta_{\ell r})$:

Caso $(-,-)=2$: $s_{2\varepsilon_i}(\beta_{ir})=\beta_{ir}-\dfrac{2(2\varepsilon_i,\beta_{ir})}{(2\varepsilon_i,2\varepsilon_i)}2\varepsilon_i=$

$$=\varepsilon_i+\varepsilon_r-\frac{4}{4}(2\varepsilon_i)=-\varepsilon_i+\varepsilon_r\in\Phi$$

Es. 4: $H \subseteq L$ sottoalg. torale massimale,

$\tilde{H} = \pi_1(H) \oplus \_ \oplus \pi_t(H)$ è una sottoalg. torale, perché

$L \to L_i \subseteq gl(L_i)$ è una rappresentazione, e

$x \mapsto ad(x)|_{L_i} : L_i \to L_i$

$\tilde{H}$ contiene H, quindi $H = \pi_1(H) \oplus \_ \oplus \pi_t(H)$ da cui

$\pi_i(H) = H \cap L_i$.

Da questo, se $H \cap L_i \subseteq K_i \subseteq L_i$ con $K_i \subseteq L_i$ s. alg. torale,

allora $\pi_1(H) \oplus \_ \oplus \pi_{i-1}(H) \oplus K_i \oplus \pi_{i+1}(H) \oplus \_ \oplus \pi_t(H)$ è torale

e contiene H, quindi $K_i = \pi_i(H) = H \cap L_i$.

Es. 5: Se un $x \in L$ non è in H, lo decomp. in

$$\underset{\substack{\uparrow \\ H}}{x = y} + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha e_\alpha \quad e \quad [h, x] = 0 + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha \alpha(h) e_\alpha,$$

se è in H $\forall h \in H$ allora $c_\alpha = 0$ $\forall \alpha$.

Es. 6: Sia $H \subseteq L$ s. alg. torale mass., allora $H \subsetneq L$, e

c'è almeno una radice α, quindi c'è almeno una sottoalg. $S_\alpha \subseteq L$ isom. a $sl(2)$.

Es. 7: dim. $= 1, 2$: v. es. 4. Sia $\alpha \in \Phi$.

4, 5: $L \supseteq S_\alpha$. Se $\Phi = \{\pm\alpha\}$ allora $\dim(H) = 1$, $\dim L = 3$, assurdo. Se $\exists \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ allora L contiene almeno L_β, $L_{-\beta}$, e kt_β non cont. in S_α, $\dim(L) \geq \dim(S_\alpha) + 3 = 6$

7: $\dim(L) = \dim(H) + 2\underbrace{\left(\frac{|\Phi|}{2}\right)}_{\in \mathbb{Z}}$ con $\frac{|\Phi|}{2} \geq \dim(H)$

(perché $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$, e Φ genera H^*)

Segue: $\dim(L) \geq 3\dim(H)$ e
$\dim(L)$, $\dim(H)$ hanno stessa parità.

$\dim(H) = 1 \Rightarrow \dim(L) = 3$

$\dim(H) = 2 \Rightarrow \dim(L) =$ pari

$\dim(H) = 3 \Rightarrow \dim(L) \geq 9$

Es. 8: V. es. 7). $\underbrace{sl(2) \oplus \_\_ \oplus sl(2)}_{n \text{ volte}}$

Es. 9: 1) Dim. che H è abeliana mass.: sia $x \in L$, scriviamo x con le entrate $a_1(x), a_2(x), n_1(x), \dots, n_{12}(x)$.

Abb.: $\forall i \in \{1, \dots, 12\}$ esiste $h_i \in H$ tale che

$n_i([h_i, x]) = n_i(x)$

ad es. per n_1 prendiamo $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

cioè $a_1(h_1) = 1$, $a_2(h_2) = 0$.

Se $[h_i, x] = 0$ allora $n_i(x) = 0$, e questo $\forall x$. Quindi se $[x, H] = 0$ allora $x \in H$.

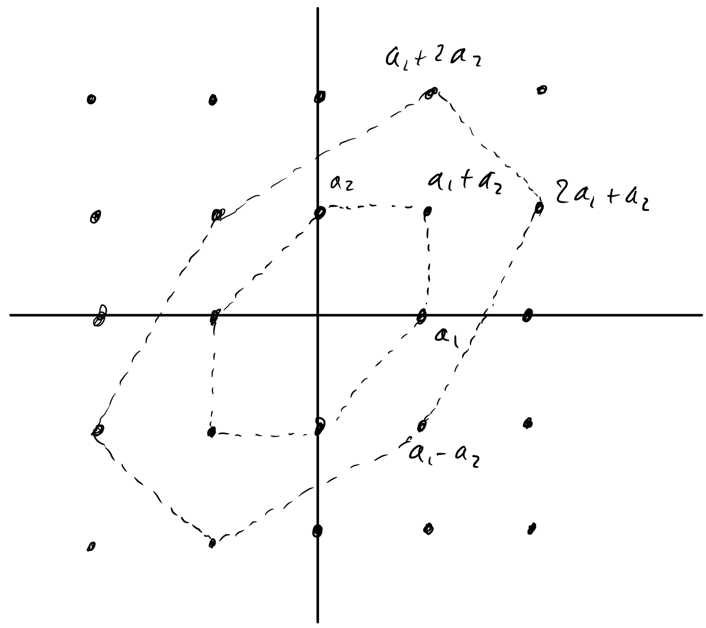
2) Gli $ad(H)$-autovett. si ottengono mettendo a zero a_1, a_2, e tutti gli n_j tranne uno, e ponendo ad es. $n_i = 1$.

Denotiamo con α_1 il funzionale $h \mapsto a_1(h)$ e con α_2 il funzionale $h \mapsto a_2(h)$. Allora le radici sono:

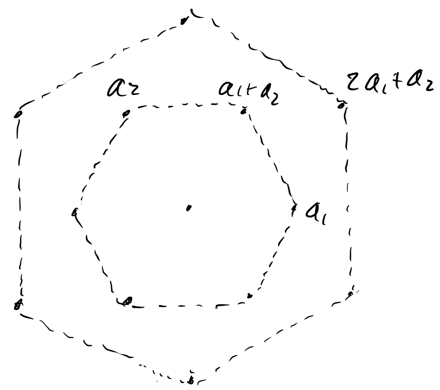
i	radice
1	$a_1 + 2a_2$
2	$a_1 - a_2$
3	$2a_1 + a_2$
4	a_1
5	$a_1 + a_2$
6	a_2

i	radice
7	$-a_2$
8	$-a_1 - a_2$
9	$-a_1$
10	$-2a_1 - a_2$
11	$a_2 - a_1$
12	$-a_1 - 2a_2$

La figura corrisp. in $\mathbb{R}^2$ è fatta dai vertici di due esagoni:



Questo disegno però non rispetta la forma di Killing fra le radici. Andrebbe deformato, e si otterrebbero due esagoni regolari:



Più precisamente, la figura è ottenuta con tutti triangoli equilateri: