Es. 1: Sia V_α autosp. di T di autoval. $\alpha \neq 0$, cioè

$$T(v) = \alpha v \quad \forall v, \quad \text{quindi} \quad v = T\left(\frac{1}{\alpha} \cdot v\right)$$

Segue: $V_\alpha \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

Decomp. $V = \underset{\ker(T)}{\underset{\shortparallel}{V_0}} \oplus V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_\ell}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ gli autoval. non nulli di T.

Dato $v = v_0 + v_{\alpha_1} + \dots + v_{\alpha_\ell}$ $\quad (v_\alpha \in V_\alpha)$

abb. $T(v) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell$ da cui $\mathrm{Im}(T) \subseteq V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_t}$.

Segue: $\mathrm{Im}(T) = V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_t}$, e $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(Si può anche vedere come caso part. del lemma prima della decomp. di Fitting, con $m = 1$).

Es. 2: Sia $\Sigma \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ lo sp. vett. generato dagli endom. S_i.

Ogni elem. di Σ commuta con ogni altro elem. di Σ.

Dim. che gli elem. di Σ si diagonalizzano tutti simultaneam. per induz. su $\dim(\Sigma)$.

Se $\dim(\Sigma) = 0$ allora $\Sigma = \{0\}$ ed è chiaro.

Sia ora $\dim(\Sigma) \geq 1$, $\Sigma' \subseteq \Sigma$ sottosp. vett. di codim. 1, e sia $\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma'$. Poss. supporre $\sigma \in \{S_i\}$ e Σ' generato dagli elem. di Σ' che sono in $\{S_i\}$, cioè $\Sigma' = \operatorname{span}(\Sigma' \cap \{S_i\})$.

Decomponiamo $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_e}$

in autosp. per σ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ = <u>tutti</u> gli autoval. di σ.

Dato $\tau \in \Sigma' \cap \{S_i\}$, abb. $\tau(V_{\alpha_i}) \subseteq V_{\alpha_i}$ (conto già visto a lezione: se $\sigma(v) = \alpha_i v$ allora $\sigma(\tau(\alpha_i)) = \tau(\sigma(v)) = \tau(\alpha_i v) =$
$= \alpha_i \tau(v)$).

Quindi gli elem. di $\Sigma' \cap \{S_i\}$ si restringono tutti a endom. di V_{α_i}, e anche queste restriz. sono diagonalizzabili (es. 4 foglio 6). Per induzione, esiste una base di V_{α_i} fatta di tutti autovett. degli elem. di Σ'. Mettendo insieme queste basi per ogni i, otteniamo una base di V fatta di autovett. per ogni elem. di Σ' e anche per σ.

Segue facilm. che sono autovett. per tutti gli elem. di Σ:

$$\Big(\underset{\substack{\Uparrow\\ k}}{a}\,\sigma + \underset{\substack{\Uparrow\\ \Sigma'}}{\tau}\Big)(v) = a\underbrace{\sigma(v)}_{\alpha_i v} + \underbrace{\tau(v)}_{\beta v} = a\,\alpha_i v + \beta v =$$
$$= (a\alpha_i + \beta)v$$

Es. 3: (1) Data $f: V \to W$ lineare:

$$f \text{ omom. di } L\text{-moduli} \iff \forall x \in L, \forall v \in V: \; f(x.v) = x.f(v)$$

$$\iff \forall x \, \forall v: \quad f(-x.v) + x.f(v) = 0 \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{azione su } Hom(V,W)}}{x.f} = 0$$

(2) Analogo osservando che $(g.f)(v) = g.f(g^{-1}v)$, che è uguale a $f(v)$ se e solo se $g^{-1}.f(v) = f(g^{-1}.v)$. Questo vale $\forall g \in G$ se e solo se $g.f(v) = f(gv)$ $\forall g \in G$.

Es. 4:

$$(x.f)(v \otimes w) = f((-x).(v \otimes w)) =$$

$$= f((-x.v) \otimes w + v \otimes (-x.v)) = f([-x, v] \otimes w - v \otimes [-x, w])$$

$$= b([v, x], w) - b(v, [x, w])$$

Es. 5: (non serve b, c simmetriche!)

cioè il funzionale $y \mapsto b(v, y)$

b induce un isom. $L \xrightarrow{\varphi} L^*$, $v \mapsto b(v, \bullet)$ e c induce un isom. $L \xrightarrow{\psi} L^*$, $v \mapsto c(v, \bullet)$

Sono isom. di L-moduli, dove L è un L-modulo con ad.

Infatti dato $x \in L$ abb.

$$\varphi(x.v) = \varphi([x, v]) = \overbrace{b([x, v], \bullet)}^{\text{cioè l'applicaz. } L \to k, \; w \mapsto b([x,v], w)} = b([v, -x], \bullet) =$$

$$= b(v, [-x, \bullet]) = x.(b(v, \bullet)) = x.\varphi(v)$$

e analogam. con c invece che b.

Quindi $\psi^{-1} \circ \varphi : L \to L$ è isom. di L-moduli.

L è semplice, quindi è un L-modulo irriducibile tramite ad.

Dal Lemma di Schur, esiste $\alpha \in k$ t.c.

$$\psi^{-1} \circ \varphi = \alpha \cdot Id_L$$

Ora, l'appl. ψ^{-1} manda un funzionale $\eta \in L^*$ nel vettore $w \in L$ tale che $\eta(\bullet) = c(w, \bullet)$.

Quindi $\psi^{-1} \circ \varphi$ manda $v \in L$ nel vettore w tale che $b(v, \bullet) = c(w, \bullet)$. Dall'uguaglianza $\psi^{-1} \circ \varphi = \alpha \cdot Id_V$ otteniamo $w = \alpha v$ (α indipendente da v), cioè

$$b(v, \bullet) = c(\alpha v, \bullet), \text{ cioè}$$

$$\forall u \in L : b(v, u) = \alpha \cdot c(v, u).$$

Es. 6: $V = V_1 \oplus V_{-1}$ scegliamo autovett. $v_i \in V_i$

$W = W_2 \oplus W_0 \oplus W_{-2}$ e $w_j \in W_j$

Inoltre $v_1 \otimes w_2$ è h-autovett. di autoval. $1+2=3$, infatti $h.(v_1 \otimes w_2) = (h.v_1) \otimes w_2 + v_1 \otimes (h.w_2) =$

$$= (1 \cdot v_1) \otimes w_2 + v_1 \otimes (2 \cdot w_2) = (1+2)\, v_1 \otimes w_2$$

e così per $v_i \otimes w_j$.

Inoltre $v_{-1}\otimes w_2$ e $v_1 \otimes w_0$ sono entrambi autovett. di autoval. 1. Quindi la base $v_i \otimes w_j$ è fatta di h-autovettori, e i pesi sono:

vetto	peso
$v_1 \otimes w_2$	3
$v_1 \otimes w_0$	1
$v_{-1} \otimes w_2$	1
$v_1 \otimes w_{-2}$	-1
$v_{-1} \otimes w_0$	-1
$v_{-1} \otimes w_{-2}$	-3

Segue: $\dim(V_3) = 1$

$\dim(V_1) = 2$

$\dim(V_{-1}) = 2$

$\dim(V_{-3}) = 1$

Deduciamo $V \otimes W = V(3) \oplus V(1)$

Es. 7: k^2 è irriducibile di dim. 2, quindi $k^2 \cong V(1)$

infatti gli h-pesi su k^2 sono 1 e -1 $\left(h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

Sia (η_1, η_2) la base duale della base canonica (e_1, e_2) di k^2.

Allora
$$(h.\eta_1)(e_1) = \eta_1(-h.e_1) = \eta_1(-e_1) = -1$$
$$(h.\eta_1)(e_2) = \eta_1(-h.e_2) = \eta_1(e_2) = 0$$

da cui $h.\eta_1 = -\eta_1$: η_1 è vettore di peso -1.

Analogam. $h.\eta_2 = \eta_2$: η_2 è vettore di peso 1.

Unica possibilità: $(k^2)^* \cong V(1)$ $(\cong k^2)$.

Es. 8: (2) $\mathfrak{sl}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{0} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{sl}(2) & \\ & \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} a \cdot I_2 & \\ & -2a \end{pmatrix} \middle| \, a \in k \right\}$

$\quad V(1) \qquad\qquad V(1) \qquad\qquad V(2) \qquad\qquad V(0)$

(1) è ovvio