Es. 1: Sappiamo che $\frac{L}{Rad(L)}$ è semisemplice, quindi è uguale alla sua derivata!

$$\frac{L}{Rad(L)} = \left[{}^{L}/_{Rad(L)}, \frac{L}{Rad(L)} \right]$$ cioè ogni classe lat.

$x + Rad(L)$ $(x \in L)$ si scrive come

$$x + Rad(L) = [Y + Rad(L), Z + Rad(L)]$$

per certi $Y, Z \in L$, da cui

$$x + Rad(L) = [Y, Z] + Rad(L)$$

cioè $x \in [Y, Z] + Rad(L)$, da cui $x \in [L, L] + Rad(L)$.

Es. 2: Per il teo. di Lie, sappiamo che esiste $v \in V \setminus \{0\}$ autovett. comune a tutti gli elem. di $\varphi(L)$, dove $\varphi: L \to gl(V)$ è la rappresentazione. (Oss.: $V \neq \{0\}$ perché è irriducibile.)

Allora $kv \subseteq V$ è un L-sottomodulo, da cui $V = kv$.

Es. 3: Si veda la soluzione sul sito del corso.

Es. 4: Dimostriamo che V non è completam. riducibile. Per assurdo, supp.

$V = V_1 \oplus \_ \oplus V_t$ con V_i irriduc. $\forall i$.

Scegliamo basi per ogni V_i e mettiamole insieme, ottenendo una base per V.

Gli elem. di L in questa base sono della forma „diagonale a blocchi":

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \boxed{*} & & & 0 \\ & \boxed{*} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{*} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{base di } V_1 \\ \text{base di } V_2 \\ \vdots \\ \text{base di } V_t \end{array} \end{array}$$

Per l'esercizio 3, ogni elem. di $Rad(L)$ agisce come uno scalare su ciascun V_i, quindi le matrici degli elem. di $Rad(L)$ sono scalari in ciascuno dei blocchi sulla diagonale. Segue che commutano con tutta L, cioè $Rad(L) \subseteq Z(L)$: assurdo.

<u>Es. 5:</u> Oss.:

$$e.\, x^p = 0 \qquad h.\, x^p = \underbrace{p}_{=0 \text{ in } k} x^p = 0 \qquad f.\, x^p = p \cdot x^{p-1} y = 0$$

$$e.\, y^p = p\, x\, y^{p-1} = 0 \qquad h.\, y^p = (-p)\, y^p = 0 \qquad f.\, y^p = 0$$

Quindi $W = k x^p + k y^p$ è un L-sottomodulo.

Oss.: $W = \operatorname{span}\{(\text{pol. omog. di grado } 1)^p\}$ perché

$$(ax+by)^p = \sum_{i=0}^{p} \underbrace{\binom{p}{i}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ in } k \text{ se } 0<i<p}} (ax)^i (by)^{p-i} = (ax)^p + (by)^p .$$

Per $p=2$ V non è completam. riducibile, perché non esiste un sottom. U tale che $V = W \oplus U$. Sia infatti p. ass. $u \in U$ per un tale U, con $u \neq 0$. Allora

$u = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ con $\beta \neq 0$, allora

$e.u = \beta x^2$ deve appartenere a U, ma $\beta x^2 \in W$

quindi $\beta = 0$, assurdo.

Es. 6: Facciamo qualche conto con $\mathfrak{sl}(n) = L$ $\forall n$.

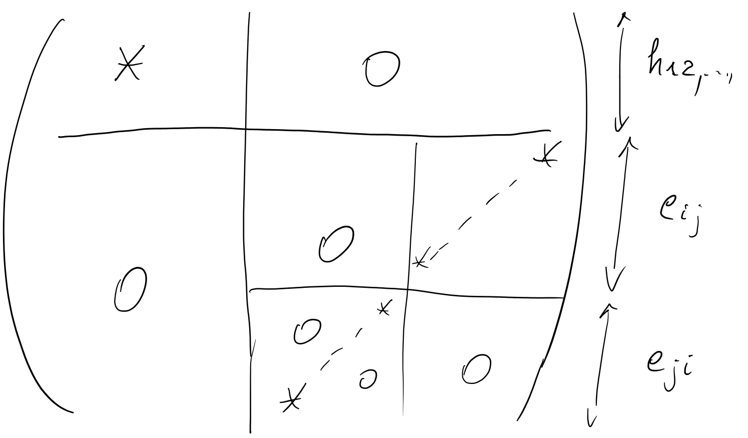
Scegliamo una base di L fatta così:

$$\Big(h_{12}, \dots, h_{n-1,n}, \underbrace{e_{12}, e_{13}, \dots}_{e_{ij} \text{ con } i<j}, \underbrace{\dots\dots, e_{31}, e_{21}}_{e_{ji} \text{ con } i<j,\ \underline{\text{ordinati}} \text{ al } \underline{\text{contrario}}} \Big)$$

dove $h_{ij} = e_{ii} - e_{jj}$.

Oss.: la prima parte della base $h_{12}, \dots, h_{n-1,n}$ è fatta da $n-1$ vettori, la seconda parte da $n(n-1)$ vettori.

Abb. già visto $K_L(e_{ij}, e_{lr}) = 0$ se $i \neq j$ e $(l,r) \neq (j,i)$, quindi la matr. di K_L in questa base è



uniche entrate $\neq 0$ sono del tipo $K_L(e_{ij}, e_{ji})$

Calcoliamo $\kappa_L(h_{ij}, h_{\ell r})$. Oss.:

$$\mathrm{ad}(h_{\ell r})(e_{ab}) = [e_{\ell\ell}, e_{ab}] - [e_{rr}, e_{ab}] = \delta_{\ell a} e_{\ell b} - \delta_{\ell b} e_{a\ell} - \delta_{ra} e_{rb} + \delta_{br} e_{ar} =$$

$$= (\delta_{\ell a} - \delta_{\ell b} - \delta_{ra} + \delta_{rb}) e_{ab}$$

Quindi

$$\mathrm{ad}(h_{ij})\,\mathrm{ad}(h_{\ell r})(e_{ab}) = (\delta_{ia} - \delta_{ib} - \delta_{ja} + \delta_{jb}) \cdot (\delta_{\ell a} - \delta_{\ell b} - \delta_{ra} + \delta_{rb})\, e_{ab}$$

da cui $\mathrm{ad}(h_{ij})\,\mathrm{ad}(h_{\ell r})$ è diagonale sulla parte di base degli e_{ab} $(a \neq b)$ (ed è zero sulla parte di base degli h_{12}, h_{23}, ecc...).

Viene:

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}(h_{i,i+1})\,\mathrm{ad}(h_{\ell,\ell+1})\right) = \sum_{a \neq b} \underbrace{(\delta_{ia} - \delta_{ib} - \delta_{(i+1)a} + \delta_{(i+1)b})}(\delta_{\ell a} - \delta_{\ell b} - \delta_{(\ell+1)a} + \delta_{(\ell+1)b}) =$$

Se scambio a con b rimane uguale, quindi la traccia è

$$= 2\left(\sum_{a<b} (\text{—})(\text{—})\right)$$

Oss. i casi seguenti per $\delta_{ia} - \delta_{ib} - \delta_{(i+1)a} + \delta_{(i+1)b}$:

$$\left.\begin{matrix} i & i+1 \\ \parallel & \\ a & \end{matrix}\right\} = 1 \qquad \left.\begin{matrix} i & i+1 \\ \parallel & \parallel \\ a & b \end{matrix}\right\} = 2$$

$$\left.\begin{matrix} i & i+1 \\ & \parallel \\ & a \end{matrix}\right\} = -1 \qquad \left.\begin{matrix} i & i+1 \\ \parallel & \\ b & \end{matrix}\right\} = -1$$

$$\left.\begin{matrix} i & i+1 \\ & \parallel \\ & b \end{matrix}\right\} = 1$$

da cui, in $sl(3)$:

$$tr\left(ad(h_{12})\,ad(h_{12})\right) = 2\Big(\underbrace{2\cdot 2}_{a=1,\ b=2} + \underbrace{1\cdot 1}_{a=1\ b=3} + \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{a=2,\ b=3}\Big) = 12$$

$$tr\left(ad(h_{23})\,ad(h_{23})\right) = 2\Big(\underbrace{(-1)(-1)}_{a=1,\ b=2} + \underbrace{1\cdot 1}_{a=1\ b=3} + \underbrace{2\cdot 2}_{a=2\ b=3}\Big) = 12$$

$$tr\left(ad(h_{12})\,ad(h_{23})\right) = 2\cdot\Big(\underbrace{2\cdot(-1)}_{a=1\ b=2} + \underbrace{(1)\cdot(1)}_{a=1\ b=3} + \underbrace{(-1)\cdot(2)}_{a=2\ b=3}\Big) = -6$$

Quindi la matrice di $K_{sl(3)}$ è della forma

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 12 & -6 & & 0 & \\ -6 & 12 & & & \\ \hline & & & & * \\ & 0 & & \iddots & \\ & & * & & \end{array}\right)$$

Rimane da calcolare $K_L(e_{ij}, e_{ji})$ con $i \neq j$, e usiamo:

$$ad(e_{ij})\,ad(e_{ji})(e_{lr}) =$$

$$= \delta_{il}\left(\quad e_{ir} - \delta_{ri} e_{jj}\right) - \delta_{rj}\left(\delta_{jl} e_{ii} - \quad e_{lj}\right)$$

Supp. $l \neq r$, cioè e_{lr} è nella seconda parte della base.

Abb. già visto che per contribuire alla traccia ci sono solo due possibilità: $e_{ir} = e_{lr}$ con $i=l$ (contributo $+1$), e

$e_{lj} = e_{lr}$ con $j=r$ (contributo $+1$).

Quindi questa parte della base contribuisce alla traccia con:

tanti $+1$ quanti sono gli r diversi da i (e pongo $l=i$)

—— " —— l — " — j (e pongo $r=j$)

cioè il contributo è $2\cdot(n-1)$.

Supp. ora $l=r$:

$$ad(e_{ij})\,ad(e_{ji})(e_{ll}) =$$

$$= \delta_{il}\left(\quad e_{il} - \delta_{li} e_{jj}\right) - \delta_{lj}\left(\delta_{jl} e_{ii} - \quad e_{lj}\right) =$$

$$= \delta_{il}\left(e_{ii} - e_{jj}\right) - \delta_{lj}\left(e_{ii} - e_{jj}\right) = \left(\delta_{il} - \delta_{lj}\right)\left(e_{ii} - e_{jj}\right)$$

Scriviamo $h_1 = h_{12}$, $h_2 = h_{23}$, ecc..., e abb.

$$ad(e_{ij})\,ad(e_{ji})(h_\ell) = (\delta_{i\ell} - \delta_{\ell j} - \delta_{i,\ell+1} + \delta_{\ell+1,j})(e_{ii} - e_{jj})$$

Supp. $i<j$ e osserviamo che $e_{ii} - e_{jj} = h_{ij} = h_i + h_{i+1} + \dots + h_{j-1}$.

Se $j > i+1$ allora questo contribuisce alla traccia con:

$+1$ prendendo $\ell = i$ $\quad\quad$ $+0$ con tutti gli altri ℓ

$+1$ prendendo $\ell = j-1$

Se invece $j = i+1$, allora il contributo alla traccia è

$+1+1$ prendendo $\ell = i$ $\quad\quad$ $+0$ con tutti gli altri ℓ

Quindi $+2$ in ogni caso.

Segue: $K_L(e_{ij}, e_{ji}) = 2(n-1)+2 = 2n-2+2 = 2n$

La matr. di $K_{\mathfrak{sl}(3)}$ è:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} & & & & & 6 \\ & & 0 & & 6 & \\ & & & 6 & & \\ & & 6 & & & \\ & 6 & & & & \\ 6 & & & & 0 & \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\det(K_L) = \underbrace{(12^2 - 6^2)} \cdot (-1)^5\, 6^6 = -(6^2 \cdot 2^2 - 6^2)\, 6^6 =$$

$$= -6^8\,(4-1) = -6^8 \cdot 3 = -3^9 \cdot 2^8$$

Es. 7: $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{sl(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{base duale } \left(\frac{f}{4}, \frac{h}{8}, \frac{e}{4}\right)$$

Es. 8: $$ad(e)\,ad\left(\frac{f}{4}\right) + ad(h)\,ad\left(\frac{h}{8}\right) + ad(f)\,ad\left(\frac{e}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_3$$

Es. 9: Siano $(a_r)_{r\in R}$ base di V e $(b_j)_{j\in J}$ base di W. Sappiamo che i vettori $a_i \otimes b_j$ formano una base di $V\otimes W$, quindi esistono indici $r_1, \dots, r_n \in R$, $j_1, \dots, j_n \in J$ e coefficienti $c_1, \dots, c_n \in k$ t.c.

$$u = c_1(a_{r_1}\otimes b_{j_1}) + \dots + \underbrace{c_m(a_{r_m}\otimes b_{j_m})}_{=(c_m a_{r_m})\otimes b_{j_m}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i a_{r_i} \otimes b_{j_i}$$

Poniamo $v_i = c_i a_{r_i}$ e $w_i = b_{j_i}$, allora

$$u = v_1 \otimes w_1 + \dots + v_m \otimes w_m.$$

Es. 10.1) Supponiamo $u = w \otimes \eta$ con $w \in W$ e $\eta \in V^*$.

Allora $\varphi(v) = w \cdot \eta(v)$ è un multiplo scalare di w $\forall v \in V$.

Se $w = 0$ opp. $\eta = 0$ allora $\varphi(v) = 0$ $\forall v$, cioè $rg(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 0$. Se $w \neq 0$ e $\eta \neq 0$ allora $\mathrm{Im}(\varphi) = k \cdot w$ ha dim. 1, quindi φ ha rango 1.

Viceversa, supponiamo φ abbia rango ≤ 1, scegliamo w che genera $\mathrm{Im}(\varphi)$ (se φ ha rango 0 cioè $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ possiamo scegliere $w = 0$).

Vogliamo trovare $\eta \in V^*$ tale che $u = w \otimes \eta$ corrisponda a φ, cioè vogliamo $\eta \in V^*$ tale che

$$\varphi(v) = w \cdot \eta(v) \qquad \forall v \in V$$

Basta porre $\eta(v) =$ lo scalare che moltiplicato per w dà $\varphi(v)$ (se $\varphi \neq 0$) e invece $\eta(v) = 0$ se $\varphi = 0$.

Per $\varphi = 0$ siamo a posto avendo preso $w = \eta = 0$

Se invece $\varphi \neq 0$ allora $\mathrm{Im}(\varphi)$ ha dim. 1, $w \neq 0$, e lo scalare $\eta(v)$ definito sopra esiste ed è unico.

Inoltre $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = w \cdot \eta(v_1) + w \cdot \eta(v_2) =$

$$= w \cdot (\eta(v_1) + \eta(v_2))$$

e $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = w \cdot (\lambda \eta(v))$

quindi η così definito è un'applicaz. lineare $V \to k$, cioè $\eta \in V^*$ e vale $\varphi(v) = w \cdot \eta(v)$.

2) Entrambe le espressioni $tr(\varphi)$ e $\sum_i \eta_i(w_i)$ sono lineari ($tr : \mathrm{Hom}(V,V) \to k$, l'altra $V \otimes V^* \to k$)

quindi poss. supporre $u = \eta \otimes w$.

Inoltre esprimendo w in una base $(e_1, -, e_n)$ e η nella base duale $(e_1^*, -, e_n^*)$ possiamo decompone u in somma di addendi del tipo $a_{ij}\, e_i \otimes e_j^*$. Quindi per linearità basta verificare che $e_j^*(e_i)$ è la traccia dell'appl. lineare $\psi : v \mapsto e_j(v) \cdot e_i$. Calcoliamo la matrice di ψ rispetto alla base $(e_1, -, e_n)$: $\psi(e_l) = e_j(e_l) \cdot e_i = \delta_{lj}\, e_i$.

Cioè la matrice di ψ è nulla, tranne che alla colonna $l = j$ (che interviene quando moltiplico la matrice per e_j) dove ha entrata $= 1$ alla riga i (in modo che il prodotto matrice $\times$ e_j faccia e_i).