Es. 1: Sia $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ un sottoinsieme tale che la somma

$$W = \sum_{i \in A} V_i$$ è una somma diretta, e tale che A sia

massimale rispetto a questa proprietà. Dim. che $W = V$.

Sia V_j con $j \in \{1, \dots, n\}$ qualsiasi: se $j \in A$ allora $V_j \subseteq W$;

se $j \notin A$ allora $W \cap V_j = \begin{cases} V_j & \text{opp.} \\ \{0\} \end{cases}$

Ma se $W \cap V_j = \{0\}$ allora $W + V_j = \left(\sum_{i \in A} V_i\right) + V_j$ è

somma diretta, cioè $A \cup \{j\}$ ha la stessa proprietà di A: assurdo.

Segue che $W \cap V_j = V_j$, cioè $V_j \subseteq W$, e allora $V_1, \dots, V_t$

sono tutti in W, cioè $W = V$.

Es. 2: Applichiamo il teo. di Lie all'algebra di Lie $ad(L) \subseteq gl(L)$.

Deduciamo che L ha una bandiera di sottosp.

$$\{0\} = L_0 \subsetneq \dots \subsetneq L_n = L \qquad (n = \dim(L))$$

tali che $\dim(L_i) = i \ \forall i$, e stabili per $ad(L)$, il che vuol dire che

sono tutti ideali di L.

Es. 3: Sia $\beta \neq \alpha$. Chiaram. $W_\beta \subseteq V_\beta$, dim. $W_\beta \supseteq V_\beta$.

Abb. $V = V_\alpha \oplus W$, sia $v \in V_\beta$ e scriviamo

$v = u + w$ con $u \in V_\alpha$, $w \in W$. Sappiamo $(T - \beta)^m v = 0$ per m grande,

$$\underbrace{(T-\beta)^m u}_{\in V_\alpha} + \underbrace{(T-\beta)^m w}_{\in W} = 0$$

Entrambi V_α e W sono $(T-\alpha)$-stabili, e sono anche ovviam. α $(= \alpha \cdot Id_V)$-stabili, quindi sono anche stabili per T, e per qualsiasi $\beta (= \beta \cdot Id_V)$ $\forall \beta \in k$. Allora $(T-\beta)^m u \in V_\alpha$ e $(T-\beta)^m w \in W$, segue $(T-\beta)^m u = 0 = (T-\beta)^m w$, cioè $w \in W_\beta$.

Vogliamo dim. $u=0$. Oss.: i polinomi $(x-\alpha)^m$ e $(x-\beta)^m$ sono primi fra loro in $k[x]$, quindi esistono $p(x)$, $q(x)$ tali che

$p(x)(x-\alpha)^m + q(x)(x-\beta)^m = 1$, e allora

$$u = 1 \cdot u = \left(p(T)(T-\alpha)^m + q(T)(T-\beta)^m\right)u = 0$$

Segue: $v = w \in W_\beta$.

Infine, oss. che V_α contiene <u>tutti</u> gli autovett. generalizz. di autoval. α di V, per cui $W_\alpha = \{0\}$.

<u>ES. 4</u>: Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V di autovett. di T.

Sia $(w_1, \dots, w_m)$ base di W, completiamola ad una base di V prendendo <u>alcuni</u> dei vettori di $\mathcal{B}$.

Riordinando $\mathcal{B}$ poss. assumere che abbiamo completato la base di W aggiungendo $v_{m+1}, \dots, v_n$, cioè $(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ è base di V.

Sia $U = \operatorname{span}\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$, allora $T(U) \subseteq U$ e $V = W \oplus U$.

Sia $p: V \to W$ la proiez. lungo U.

Dato v qualsiasi, abb. $v = u + w$ con $u \in U$, $w \in W$, e vale:

$T(p(v)) = T(w)$

$$p(T(v)) = p(T(u+w)) = p(\underbrace{T(u)}_{\in U} + \underbrace{T(w)}_{\in W}) = T(w)$$

Quindi $T \circ p = p \circ T$.

Segue: $\forall i$: $p(v_i)$ è autovett. di T. Infine: $p(v_1), \dots, p(v_n)$ generano W, e sono autovett. di T, quindi $T|_W$ è diagonalizzabile.

Esercizio in più: Dim. che $W = (V_{\alpha_1} \cap W) \oplus \dots \oplus (V_{\alpha_e} \cap W)$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_e$ sono gli autoval. di T, e

V_{α_i} è l'autosp. di autoval. i.

Es. 5: Sappiamo che X_s commuta con tutto quello che commuta con X (perché X_s è un polinomio in X) e analogam. X_n.
Poi Y_s commuta con Y (per lo stesso motivo), quindi X_s e Y_s commutano.
Abb. già ricordato a lezione che endomorfismi diagonalizzabili che commutano si diagonalizzano simultaneamente, cioè rispetto a una stessa base sono diagonali. Allora anche $X_s + Y_s$ è diagonale rispetto a quella base, cioè è semisemplice.
Analogamente X_n e Y_n commutano quindi $X_n + Y_n$ è nilpotente.

commutano

$$\text{Allora } X + Y = \underbrace{(X_s + Y_s)}_{\text{semisemplice}} + \underbrace{(X_n + Y_n)}_{\text{nilpotente}}$$

quindi $X_s + Y_s = (X+Y)_s$ e $X_n + Y_n = (X+Y)_n$ per l'unicità della decomposizione di J.-C..

Un esempio come richiesto infine è:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ semisemplice},$$

$X + Y = (X+Y)_s$, invece $X_s + Y_s = 0$.

Es. 6: Sia L nilpotente, allora tutti gli elem. di L sono ad-nilpotenti, quindi (coroll. al 1° teo. di "punto fisso") esiste una base di L tale che $ad(L) \subseteq b^u(\underset{\dim(L)}{n})$. Allora $ad(x)\,ad(y) \in b^u(n)$ $\forall x, y \in L$, e $tr(ad(x)ad(y)) = 0$.

Es. 7: Sappiamo che $ad(L) \subseteq b(\underset{\dim(L)}{n})$ in una base di L, per cui $ad(x) \in b^u(n)$, e allora $ad(x)ad(y) \in b^u(n)$.

Es. 8: Prendiamo come base di $sl(n)$ le matrici e_{ij} con $i \neq j$, e le matrici $e_{11} - e_{22}, e_{22} - e_{33}, \dots, e_{n-1,n-1} - e_{nn}$.
Si verifica facilmente che sono lin. indip. e sono $n^2 - 1$, quindi sono una base di $sl(n)$. Calcoliamo $ad(e_{ij})\,ad(e_{st})$ sugli el. di questa base, iniziamo calcolandolo su una matrice elementare e_{lr}.

$$ad(e_{st})(e_{\ell r}) = \underbrace{\delta_{t\ell}\, e_{sr} - \delta_{rs}\, e_{\ell t}}$$

$$ad(e_{ij})\, ad(e_{st})(e_{\ell r}) = ad(e_{ij})(\quad) =$$

$$= \delta_{t\ell}\left(\delta_{js}\, e_{ir} - \delta_{ri}\, e_{sj}\right) - \delta_{rs}\left(\delta_{j\ell}\, e_{it} - \delta_{ti}\, e_{\ell j}\right) \qquad (*)$$

Supponiamo prima di tutto che $\ell \neq r$, cioè stiamo calcolando $ad(e_{ij})\, ad(e_{st})$ sull' elem. $e_{\ell r}$ della base di $sl(n)$.

Perché contribuisca alla traccia, fra questi addendi deve comp. un multiplo di $e_{\ell r}$, cioè ho 4 possibilità:

1) $e_{ir} = e_{\ell r}$ con coeff. $\delta_{t\ell}\, \delta_{js} \neq 0$, cioè $t = \ell (= i)$, $j = s$
$(i = \ell)$

Cioè $\boxed{e_{st} = e_{ji}}$

2) $e_{sj} = e_{\ell r}$ ($\Rightarrow s = \ell$, $j = r$) con coeff. $\delta_{t\ell}\, \delta_{ri} \neq 0$, cioè $t = \ell (= s)$, $r = i (= j)$
ma allora $i = j$: assurdo.

3) $e_{it} = e_{\ell r}$ ($\Rightarrow i = \ell$, $t = r$) con coeff. $\delta_{rs}\, \delta_{j\ell} \neq 0$, cioè $r = s (= t)$, $j = \ell (= i)$
$\Rightarrow i = j$ assurdo.

4) $e_{\ell j} = e_{\ell r}$ ($\Rightarrow j = r$) con coeff. $\delta_{rs}\, \delta_{ti} \neq 0$, cioè $r = s (= j)$, $t = i$

cioè $\boxed{e_{st} = e_{ji}}$.

Calcoliamo ora $ad(e_{ij})\,ad(e_{st})$ sull'elem. $e_{ll} - e_{l+1,l+1}$ della base:

si tratta dell'espressione $(*)$ con $r = l$ ⇝ chiamiamola (A)

meno l'espressione $(*)$ con $l+1$ al posto di l e r ⇝ chiamiamola (B)

Perché contribuisca alla traccia ci deve essere qualche matrice elementare con indici uguali di riga e colonna (altrim. l'elemento è nello span degli e_{ij} con $i \neq j$, che sono altri elem. della base). Possibilità:

in (A) (quindi $r=l$): 1) e_{ir} quindi

$i = r = l$, $t = l$, $j = s$

da cui $\boxed{e_{st} = e_{ji}}$

2) e_{sj} quindi

$s = j$, $r = l = i$, $t = l$

da cui $\boxed{e_{st} = e_{ji}}$

3) e_{it} quindi

$i = t$, $j = l$, $l = r = s = j$

da cui $\boxed{e_{st} = e_{ji}}$

4) e_{lj} quindi

$l = r = j$, $t = i$, $r = s = l = j$

da cui $\boxed{e_{st} = e_{ji}}$

(B): identico, tanto è solo $(l+1, l+1)$ invece di (l, l).

Es. 9: Sia $y \in L$:

$$[\delta, ad(x)] = \delta \circ ad(x) - ad(x) \circ \delta$$

applicato a y fa:

$$\delta(ad(x)(y)) - ad(x)(\delta(y)) =$$

$$= \delta([x,y]) - [x, \delta(y)] = \cancel{[x, \delta(y)]} + [\delta(x), y] - \cancel{[x, \delta(y)]} =$$

$$= [\delta(x), y] = ad(\delta(x))(y)$$

quindi $ad(\delta(x)) = [\delta, ad(x)]$

Es. 10: $a \cdot [b,c] = \underbrace{a\,b\,c} - \underbrace{a\,c\,b}$

$\updownarrow =$ $\quad \updownarrow$ stessa traccia, perché

$[a,b] \cdot c = \overbrace{a\,b\,c} - \overbrace{b\,a\,c}$ $\qquad tr((ac) \cdot b) =$

scambio

$= tr(b \cdot (ac))$