Es. 1: Consid. I ideale risolubile di $L/Rad(L)$, allora I è della forma $J/Rad(L) = I$ per J ideale di L contenente $Rad(L)$.
Segue che J è risolubile (perché $Rad(L)$ e $J/Rad(L)$ lo sono) quindi $J \subseteq Rad(L)$, cioè $I = \{0\}$. Allora $L/Rad(L)$ non ha ideali risolubili non nulli, allora è semisemplice.

Es. 2: Sia (x, y) una base di L. Allora $[L, L]$ è generato come sp. vett. da $[x, y]$, cioè $\dim([L, L]) \leq 1$ $(= 1 \iff [x, y] \neq 0)$.
Segue: $[L, L]$ abeliano, quindi $L^{(2)} = \{0\}$.
Un esempio di alg. risolubile ma non nilpot. di dim. 2:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\} = L \qquad [L, L] = \operatorname{span} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]}_{= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[L, [L, L]] \ni \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e per induz. $L^m \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Es. 3: Sia per assurdo $\dim(Rad(L)) \geq \dim(L) - 2$.
Allora $L/Rad(L)$ ha dim. ≤ 2, da cui $L/Rad(L)$ è risolubile: se ha dim. 1 è abeliana quindi risol., se ha dim. 2 è risolubile per l'es. prec..

Ma anche $Rad(L)$ è risolubile, e seguirebbe L risolubile: assurdo.

Es. 4: L semisemplice $\Rightarrow Rad(L) = \{0\}$, e si usa l'eserc. precedente.

Es. 5: $\dim(sl(2)) = 3 \quad gl(sl(2)) = gl(3)$.

Sia $\delta \in Der(L)$, $2\delta(e) = \delta([h,e]) = [\delta(h), e] + [h, \delta(e)] =$

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= [a_{12} e + a_{22} h + a_{32} f, e] + [h, a_{11} e + a_{21} h + a_{31} f] =$$

$$= 2a_{22} e - a_{32} h + 2a_{11} e - 2a_{31} f$$

$$= 2a_{11} e + 2a_{21} h + 2a_{31} f$$

Segue: $a_{31} = 0$, $2a_{21} = -a_{32}$, $a_{22} = 0$

Usando $h = [e,f]$ e $2f = [f,h]$ si ottiene

$$\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & -2a_{23} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & -2a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}\, ad(h) + a_{23}\, ad(e) - a_{21}\, ad(f)$$

Es. 6: Supp. p. ass. $\dim([L,I]) = \dim(I)$, quindi $[L,I] = I$,

$[L,[L,I]] = [L,I] = I$, e per induz. $\forall m$:

$\underbrace{[L,[L,\dots,[L,I]\dots]]}_{m} = I$, che è cont. in L^{m-1},

assurdo.

Es. 7: 1) $N_{gl(n)}\big(\overset{h(n)\text{ opp.}}{b(n)}\big)$: basta usare matrici diagonali in $b(n)$:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, A\right] = \begin{pmatrix} & 0 & \\ \hline & \boxed{\text{i-esima riga di } A} & \\ \hline & 0 & \end{pmatrix} - \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

posto i

i-esima colonna di A

quindi se il risultato deve essere in $b(n)$ o $h(n)$ allora A era già in $b(n)$ rispett. $h(n)$.

2) $b^u(n) = [b(n), b(n)]$ è un ideale di $b(n)$ quindi $N_L(b^u(n)) \supseteq b(n)$.

Per l'altra inclusione, oss. che

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ c & d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}}_{\in N_L(b^u(n))}\right] = \begin{pmatrix} c & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

quindi $c = 0$

e con conti simili si conclude che la matrice in $N_L(b^u(n))$ deve stare in $b(n)$.

Es. 8: L di dim. 3

1) $L = [L, L]$, $L = \mathrm{Span}\{x, y, z\}$

$[L, L]$ è gen. da $[x,y]$, $[x,z]$, $[y,z]$

quindi nessuno di questi è nullo, sono lin. indip.

Sia $I \neq \{0\}$ ideale, supp. $\dim(I) = 1$, e $I = \mathrm{Span}\{x\}$ (poss. farlo a meno di cambiare base). Allora

$[x, y]$, $[x, z] \in I \Rightarrow$ sono lin. dip.: assurdo.

Supp. $\dim(I) = 2$, $I = \mathrm{Span}\{x, y\}$. Allora

$[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z] \in I \Rightarrow$ sono lin. dip.: assurdo.

Segue: $I = L$, cioè L è semplice.

2) $[L, L]$ ha dim. 2 $\Rightarrow$ $[L, L]$ è risolubile per l'eserc. 2.

Inoltre $\dfrac{L}{[L,L]}$ abeliana $\Rightarrow$ risol., e allora L è risolubile.

es. $L = [L, L]$ ma L non semis.:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathfrak{sl}(2)} & k^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & & \\ 0 & -a & & 0 \\ \hline & & a & c \\ & 0 & 0 & -a \end{array} \right) \right\} = L$$

oss.: $\big(\underbrace{\mathfrak{b}(2) \cap \mathfrak{sl}(2)}_{\text{dim. 2}}\big)^{(1)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim. 1}}}{\mathfrak{n}(2)}$

Es. 9: Consid. $L \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \dots \supseteq L^m = \{0\}$

Vale $L \not\subseteq K$, mentre $\{0\} \subseteq K$.

Sia s l'ultimo indice per cui $L^s \not\subseteq K$, allora $L^{s+1} \subseteq K$.

D'altronde $[L, L^s] = L^{s+1} \subseteq K$, quindi $L^s + K \supsetneq K$ e

$$[L^s + K, K] = [L^s, K] + [K, K] \subseteq L^{s+1} + K = K.$$

Cioè $N_L(K) \supseteq L^s + K \supsetneq K$.

Es. 10 : $I^{(n)}$ per induzione: $n=0$: ok

passo induttivo: Sia $x \in I^{(n)}$, allora x è comb. lin. di bracket del tipo $[y_i, z_i]$ con $y_i, z_i \in I^{(n-1)}$.

Sia $w \in L$:

$$[w,[y_i, z_i]] = [\underbrace{[w,y_i]}_{\substack{\Uparrow \\ I^{(n-1)} \text{ per} \\ \text{induz.}}}, \overset{\substack{I^{(n-1)} \\ \Downarrow}}{z_i}] + [\overset{\substack{I^{(n-1)} \\ \Downarrow}}{y_i}, \underbrace{[w, z_i]}_{\substack{\Uparrow \\ I^{(n-1)} \text{ per} \\ \text{induz.}}}] \in I^{(n)}$$

Segue: $[w,x] \in I^{(n)}$

L^n: analogo.