Es. 1: $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se A e C sono invertibili. Quindi $(A, B, C) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ è un omeomorfismo $GL(m, \mathbb{C}) \times M_{m \times (n-m)}(\mathbb{C}) \times GL(n-m, \mathbb{C}) \to P$.

Il dominio è connesso, quindi P è connesso.

Dim. che $\mathfrak{p} = Lie(P)$. Si può dimostrare in modo simile all'uguaglianza $\mathfrak{b}(n) = Lie(B(n))$, vediamo un altro modo.

$\mathfrak{p} \supseteq Lie(P)$: Sappiamo che $W = Span\{e_1, \dots, e_m\}$ è un P-sottomodulo di $\mathbb{C}^n$, per come sono fatte le matrici di P (perché hanno tutte entrate uguali a zero nel blocco in basso a sinistra. Allora W dev'essere anche un $Lie(P)$-sottomodulo, cioè anche le matrici di $Lie(P)$ devono avere zeri nel blocco in basso a sinistra.

Segue: $Lie(P) \subseteq \mathfrak{p}$.

$Lie(P) \supseteq \mathfrak{p}$: Data $X \in \mathfrak{p}$, sappiamo che $X(W) \subseteq W$ perché X ha zeri nel blocco in basso a sinistra, e ugualm. per tX $\forall t \in \mathbb{R}$.

Con la serie esponenziale otteniamo facilmente $e^{tX}(W) \subseteq W$ cioè e^{tX} ha zeri nel blocco in basso a sinistra, da cui $e^{tX} \in P$ $\forall t$, cioè $X \in Lie(P)$.

Es. 2: $U \cap W$ è un sottomodulo contenuto in W.

Es. 3: Questo è un fatto standard di teoria delle rappresentazioni.

(1) $\Rightarrow$ (2) | Sia $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ con V_i irriducibile $\forall i$.

Sia U somma di alcuni V_i, tale che $U \cap W = \{0\}$, e massimale rispetto a queste proprietà (eventualm. U può essere $\{0\}$ che interpretiamo come somma di nessun V_i).

Dim. che $V = U \oplus W$. Abb. $U \cap W = \{0\}$ per costruzione, va dim. che $V = U + W$. Dim. che $V_i \subseteq U + W$ $\forall i$.

Se V_i appare fra quelli scelti per U, allora $V_i \subseteq U + W$.

Sia allora V_i che non appare nella somma che dà U.

Dall'esercizio precedente sappiamo che $V_i \cap (U+W) \in \{V_i, \{0\}\}$.

Se $V_i \cap (U+W) = V_i$ allora $V_i \subseteq U + W$. Supp. per assurdo $V_i \cap (U+W) = \{0\}$. Allora vale $(U \oplus V_i) \cap W = \{0\}$, perché se $w = u + v$ con $w \in W$, $u \in U$, $v \in V_i$ allora

$V_i \ni v = w - u \in U + W$ quindi $v = 0$, $w = u$, e $w = 0$ perché $U \cap W = \{0\}$. Quindi $U \oplus V_i$ soddisfa le condizioni che definivano U e contiene strettam. U: assurdo.

Quindi $V = U \oplus W$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Se $V = \{0\}$ allora è completam. riducibile, quindi poss. supporre $V \supsetneq \{0\}$. Allora V ha sottomoduli non nulli (es. V stesso). Sia V_1 sottomodulo non nullo minimale, allora V_1 è irriducibile (se V_1 contenesse sottomoduli diversi da $\{0\}$ e da V_1 non sarebbe minimale). Per ipotesi esiste $U_1 \subseteq V$ sottomodulo con

$$V = V_1 \oplus U_1$$

Se $U = \{0\}$ abb. finito, quindi supp. $U \neq \{0\}$ e sia $V_2 \subseteq U_1$ un sottomodulo non nullo minimale ($\Rightarrow$ irriducibile, come prima).

Allora $V_1 \oplus V_2$ è un sottomodulo di V, esiste un $U_2 \subseteq V$ sottomodulo t.c.

$$V = \underbrace{V_1 \oplus V_2}_{\text{irriducibili}} \oplus U_2$$

Iterando ottengo somme dirette $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_i$ sempre più grandi, e per motivi di dimensione una di queste somme dirette è $= V$.

Segue $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

(Oss. che la stessa dim. vale in dimensione infinita e con un numero infinito di addendi, usando il lemma di Zorn.)

Es. 4:

$$\left.\begin{aligned} & ad(e)(e) = 0 \\ & ad(e)(h) = [e,h] = -[h,e] = -2e \\ & ad(e)(f) = h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{le matr. di } ad(e) \text{ è } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} & ad(h)(e) = [h,e] = 2e \\ & ad(h)(h) = 0 \\ & ad(h)(f) = [h,f] = -2f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{matr. di } ad(h) \text{ è } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} & ad(f)(e) = -h \\ & ad(f)(h) = -[h,f] = -(-2f) = 2f \\ & ad(f)(f) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{matr. di } ad(f) \text{ è } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es. 5: Dobb. dim. che

$$\tilde{\varphi} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$$

$$x \longmapsto \underbrace{\Big(\eta \mapsto \underbrace{\big(v \mapsto \eta(-x.v)\big)}_{= \; x.\eta}\Big)}_{\tilde{\varphi}(x)}$$

è omom. di algebre di Lie.

Intanto $\underset{\tilde{\varphi}(x)(\eta)}{\overset{\shortparallel}{x.\eta}}$ è un'applicaz. lineare $V \to k$ (verifica immediata).

Quindi effettivam. $\tilde{\varphi}(x)$ è un'applicazione $V^* \to V^*$.

Poi, $\tilde{\varphi}(x)$ è lineare, anche questa verifica è immediata

(es. $\tilde{\varphi}(x)(\eta_1 + \eta_2) : v \longmapsto (\eta_1 + \eta_2)(-x.v)$ uguali

$\tilde{\varphi}(x)(\eta_1) + \tilde{\varphi}(x)(\eta_2) : v \longmapsto \eta_1(-x.v) + \eta_2(-x.v)$

da cui $\tilde{\varphi}(x)(\eta_1 + \eta_2) = \tilde{\varphi}(x)(\eta_1) + \tilde{\varphi}(x)(\eta_2)$.)

Quindi effettivam. $\tilde\varphi(x) \in \mathfrak{gl}(V^*)$.

Infine, $\tilde\varphi$ è lineare, cioè ad es. $\tilde\varphi(x+y) \overset{(?)}{=} \tilde\varphi(x) + \tilde\varphi(y)$, perché dati $\eta \in V^*$ e $v \in V$ abb.

$$\big(\tilde\varphi(x)(\eta)\big)(v) + \big(\tilde\varphi(y)(\eta)\big)(v) = \eta(-x.v) + \eta(-y.v) =$$

$$= \eta\big(-(x+y).v\big) =$$

$$= \big(\tilde\varphi(x+y)(\eta)\big)(v)$$

Rimane da verificare $\tilde\varphi([x,y]) \overset{(?)}{=} \underset{\text{in } \mathfrak{gl}(V^*)}{\underset{\uparrow}{[\tilde\varphi(x), \tilde\varphi(y)]}} \big(= \tilde\varphi(x)\circ\tilde\varphi(y) - \tilde\varphi(y)\circ\tilde\varphi(x)\big)$ $\forall x, y \in L$

Siano allora $\eta \in V^*$, $v \in V$:

$$\big(\tilde\varphi([x,y])(\eta)\big)(v) = \eta\big(-[x,y].v\big) \underset{\uparrow}{=} \eta\Big(-\big(x.(y.v) - y.(x.v)\big)\Big) = \dots$$

perché $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$, $x \mapsto (v \mapsto x.v)$ è omom. di alg. di Lie

$$= -\eta\big(x.(y.v)\big) + \eta\big(y.(x.v)\big)$$

$$\Big(\big(\tilde\varphi(x)\circ\tilde\varphi(y)\big)(\eta)\Big)(v) = \Big(\tilde\varphi(x)\big(\tilde\varphi(y)(\eta)\big)\Big)(v) =$$

$$= \big(\tilde\varphi(y)(\eta)\big)(-x.v) = \eta\big(-y.(-x.v)\big) = \eta\big(y.(x.v)\big)$$

e $\Big(\big(\tilde\varphi(y)\circ\tilde\varphi(x)\big)(\eta)\Big)(v) = \dots = \eta\big(x.(y.v)\big)$

Quindi la verifica è completa.

Da dim.:

Es. 6:

$$ad : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$
$$x \longmapsto \left(\begin{array}{l} ad(x) : L \longrightarrow L \\ \quad y \longmapsto [x,y] \end{array} \right)$$

è rappresentaz. di L.

Intanto: 1) $ad(x)$ è lineare $L \to L$ per ogni x (ovvio dalla bilin. di $[-,-]$)

2) $x \mapsto ad(x)$ è lineare $L \to \mathfrak{gl}(L)$, ovvio dalla bilinearità di $[-,-]$.

Infine, va dim. che $ad([x,y]) \overset{(?)}{=} [ad(x), ad(y)] = ad(x) \circ ad(y) - ad(y) \circ ad(x)$ $\forall x,y \in L$

Sia $z \in L$:

$ad([x,y])(z) = [[x,y],z]$

$(ad(x) \circ ad(y))(z) = ad(x)(ad(y)(z)) = [x,[y,z]]$

$(ad(y) \circ ad(x))(z) = \quad \dots = [y,[x,z]]$

Quindi dobb. dim. che $[[x,y],z] \overset{(?)}{=} [x,[y,z]] - [y,[x,z]]$

vero per l'ug. di Jacobi.

Es. 7:

$ad(x)(yz) = [x, yz] = xyz - yzx$

prodotto usuale di matrici

$ad(x)(y)\, z + y\, ad(x)(z) = xyz - \cancel{yxz} + \cancel{yxz} - yzx =$

Es. 8: Abb. visto che V è un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo irriducibile, e sappiamo che $SL(2)$ è connesso, quindi V è anche un $SL(2)$-modulo irriducibile.

Es. 9: (1) Dato W, definiamo $U = W^\perp$. Allora $U \oplus W = \mathbb{R}^n$, va dim. che U è un G-sottomodulo.

Siano $u \in U$, $g \in G$, $w \in W$, allora

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prod. scalare} \\ \text{std di } \mathbb{R}^n}}{\langle w, \varphi(g) u \rangle} \underset{\text{perché } \varphi(g)^{-1} \in O(n, \mathbb{R})}{=} \langle \varphi(g)^{-1} w, \varphi(g)^{-1} \varphi(g) u \rangle =$$

$$= \langle \underbrace{\varphi(g^{-1}) w}_{\in W}, \underset{W^\perp}{\underset{\cap}{u}} \rangle = 0$$

Segue: $\varphi(g) u \in U$ $\forall u \in U$, cioè U è un G-sottom.

(2) Basta usare l'eserc. 3.

Es. 10: (1) Uguale alla dim. per $\mathfrak{sp}(n)$.

(2) Sia $X \in \mathfrak{so}(A)$, allora

$$Y = M X M^{-1} \in \mathfrak{so}(M A\, {}^tM)$$

infatti $\quad Y \cdot M A\, {}^tM + M A\, {}^tM\, {}^tY =$

$$= M X \cancel{M^{-1}} \cdot \cancel{M} A\, {}^tM + M A\, {}^tM\, {}^t(M X M^{-1}) =$$

$$= M\, XA\, {}^tM + MA\, \cancel{{}^tM} \cdot \cancel{{}^tM^{-1}}\, {}^tX\, {}^tM =$$

$$= M\, XA\, {}^tM + MA\, {}^tX\, {}^tM = M(XA + A\, {}^tX)\, {}^tM = 0$$

Viceversa, se $Y \in \mathfrak{so}(MA\,{}^tM)$ allora $X = M^{-1} Y M \in \mathfrak{so}(A)$ (verifica simile). Allora

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(A) &\longrightarrow \mathfrak{so}(MA\,{}^tM) \\ X &\longmapsto MXM^{-1} \end{aligned}$$

è biiettiva e lineare in X. E' isom. di algebre di Lie, perché $[MXM^{-1}, MX'M^{-1}] = M[X, X']M^{-1}$.

(3) $X = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij})_{ij}$ $\quad {}^tX = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ji})_{ij}$

$$XJ = \begin{pmatrix} c_{1n} & \cdots & c_{12} & c_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{nn} & \cdots & c_{n2} & c_{n1} \end{pmatrix} = (c_{i,\, n-j+1})_{ij}$$

$$J\, {}^tX = \begin{pmatrix} c_{1n} & \cdots & c_{nn} \\ & & \\ c_{11} & \cdots & c_{n1} \end{pmatrix} = (c_{j,\, n-i+1})_{ij}$$

$XJ + J\,{}^tX = 0$ implica $c_{i,\, n-j+1} = -c_{j,\, n-i+1}$ $\forall i,j$

cioè $c_{i,j} = -c_{n-j+1,\, n-i+1}$ $\forall i,j$:

$i \backslash j$	1	2		n
1	$c_{1,1} = -c_{n,n}$	$c_{1,2} = -c_{n-1,n}$	$\cdots$	$c_{1,n} = -c_{1,n}$
2	$c_{2,1} = -c_{n,n-1}$	$c_{2,2} = -c_{n-1,n-1}$		$c_{2,n} = -c_{1,n-1}$
$\vdots$		$\vdots$		
n	$c_{n,1} = -c_{n,1}$	$c_{n,2} = -c_{n-1,}$	$\cdots$	$c_{n,n} = -c_{1,1}$

Questo vuol dire che X è antisimm. rispetto alla diag. principale:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & 0 \\ & & & & -c_{1,n-1} \\ & & & & \\ c_{n-1,1} & & & & -c_{12} \\ 0 & -c_{n-1,1} & & & -c_{11} \end{pmatrix}$$

Allora $\dim(so(J)) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.