Es. 1: Nella soluzione dell'esercizio 8 del foglio 1 abb. visto il fatto seguente: se $X \in M_2(\mathbb{C})$ è tale che

$$e^X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

allora X non è diagonalizzabile, ed è della forma

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

dove $\lambda = m\pi i$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$ dispari. In particolare $\lambda \neq 0$.

Ora, visto che X non è diagonalizzabile, non può avere due autovalori distinti, perciò X è della forma

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad e \quad tr(X) = 2\lambda \neq 0$$

$\square$

Esercizio 2: $\mathfrak{p}$ è un sottosp. vett. chiuso per prodotto, quindi è una s.alg. associativa e di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$. Per $\mathfrak{n}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & BF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & DB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathfrak{n}$ è un ideale di $\mathfrak{p}$.

Per $\mathfrak{r}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda I & B \\ 0 & \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda D & \lambda E + BF \\ 0 & \mu F \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I & B \\ 0 & \mu I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda D & DB \\ 0 & \mu F \end{pmatrix}$$

quindi $\left[\begin{pmatrix} \lambda I & B \\ 0 & \mu I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \lambda E + BF - DB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi $\mathfrak{r}$ è un ideale di $\mathfrak{p}$.

Es. 3: 1) $\mathfrak{u}(n)$ è chiuso per somma e prod. per $s \in \mathbb{R}$

$$(sA) + {}^t\overline{(sA)} = sA + s\,{}^t\bar{A} = s(A + {}^t\bar{A}) = 0$$

non funziona se $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$!

$\mathfrak{u}(n)$ è chiuso per bracket:

$${}^t(\overline{A}\,\overline{B}) = {}^t\bar{B}\,{}^t\bar{A}$$

$$[A,B] + {}^t\overline{[A,B]} = AB - BA + {}^t\overline{(AB-BA)} = AB - BA + {}^t\overline{(AB)} - {}^t\overline{(BA)} =$$

$$= AB - BA + {}^t\bar{B}\,{}^t\bar{A} - {}^t\bar{A}\,{}^t\bar{B} = \qquad ({}^t\bar{A} = -A,\ {}^t\bar{B} = -B)$$

$$= \cancel{AB} - \cancel{BA} + \cancel{(-B)(-A)} - \cancel{(-A)(-B)} = 0$$

2) Sia $A \in \mathfrak{u}(n)$, allora

$$(iA) + {}^t\overline{(iA)} = iA + \bar{i}\,{}^t\bar{A} = iA - i\,{}^t\bar{A} = i\underbrace{(A - {}^t\bar{A})}_{\neq 0 \text{ se } A \neq 0 \,!}$$

Es. 4: $G = \{I_2\}$, $\mathrm{Lie}(G) = \{0\}$

ma $$e^{\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) & -\sin(2\pi) \\ \sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{pmatrix} = I_2$$

Es. 5: 1) $Lie(SO(n,\mathbb{R})) = so(n,\mathbb{R})$ è sottoalg. di Lie

$\dim(so(n,\mathbb{R})) = \dim(\{A \in gl(n,\mathbb{R}) \mid A \text{ antisimm.}\}) = \frac{n(n-1)}{2}$

per $n=2$ vale $\dim(so(2,\mathbb{R})) = \frac{\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}} = 1$

Segue $so(2,\mathbb{R})$ abeliana (d'altronde $so(2) = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$)

$SO(2,\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cong S^1$ abeliano

2) $O(2,\mathbb{R})$ contiene $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che non

commutano: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es. 6: Visto che G^0 ha indice 2, allora scegliamo $g \in G \setminus G^0$

e scriviamo $G = G^0 \cup gG^0$ unione disgiunta.

Idea: usare il coniugio per g, visto che G^0 è normale in G:

$$\begin{aligned} \gamma : G^0 &\longrightarrow G^0 \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

Dobb. dim. che γ non è l'identità, cioè che g non commuta con tutti gli elem. di G^0.

Sappiamo che G non è abeliano ma G^0 sì, quindi esistono due elem. di G che non commutano e non sono entrambi in G^0. Se uno dei due è in G^0 abbiamo finito, altrim. sono gh e gk per qualche $h, k \in G^0$.

Allora $gh\, gk \neq gk\, gh$, da cui

$hgk \neq kgh$

ma allora g non commuta con entrambi h e k, cioè g non commuta con tutti gli elem. di G^0.

<u>Es. 7</u>: Esempio facilissimo: G sgr finito di $GL(n,\mathbb{R})$, $H = \{I_n\}$ sgr banale, G non banale. Allora $Lie(G) = Lie(H) = \{0\}$ ma G e H non sono isomorfi.

Esempio con entrambi i gruppi <u>connessi</u>:

$SO(2,\mathbb{R}) \simeq S^1$ è compatto

$GL(1,\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}_{\neq 0}, \times)$ non è compatto

però $Lie(SO(2,\mathbb{R})) = \mathfrak{so}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}) = Lie(GL(1,\mathbb{R}))$.

hanno entrambe dim. 1
quindi sono abeliane e isomorfe

<u>Es. 8</u> i2) Supponiamo $G \leq GL(n,\mathbb{R})$ abeliano, e sia $V = Span(G) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ il <u>sottospazio</u> <u>vettoriale</u> generato da G.

Le matrici in V commutano tutte, infatti date due comb. lin.

$X = a_1 g_1 + \ldots + a_r g_r \qquad Y = b_1 h_1 + \ldots + b_s h_s$

con $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ e $g_i, h_j \in G$ $\forall i,j$, abb.

$$XY = (a_1 g_1 + \dots + a_r g_r) \cdot (b_1 h_1 + \dots + b_s h_s) = \sum_{i,j} a_i g_i \, b_j h_j = \sum_{i,j} a_i b_j \, g_i h_j$$

$$YX = (\dots)\cdot(\dots) = \sum_{i,j} b_j h_j \, a_i g_i = \sum_{i,j} a_i b_j \, h_j g_i$$

e abb. $XY = YX$ perché $g_i h_j = h_j g_i$.

Osserviamo ora che $Lie(G) \subseteq V$, infatti data $X \in Lie(G)$ scegliamo $t \in \mathbb{R}$ piccolo ($\neq 0$) tale che log sia definita in e^{tX} e valga $\log(e^{tX}) = tX$.

Sappiamo $e^{tX} \in G$, chiamiamo $g = e^{tX}$, e allora

$$tX = \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \underbrace{(g - I_n)^i}_{\in V} \right)$$

Tutte le somme parziali sono in V, quindi anche il limite tX è in V (i sottosp. vett. di $\mathbb{R}^{n^2}$ sono sottoinsiemi <u>chiusi</u>!).

Segue: $X \in V$.

Allora tutte le matrici in $Lie(G)$ commutano fra loro.

1) Sia $g \in G$, troviamo $X \in Lie(G)$ tale che $e^X = g$.

Visto che G è connesso, a lezione abb. visto che $\exp(Lie(G))$ genera G, cioè esistono $X_1, \dots, X_m \in Lie(G)$ tali che

$$e^{X_1}\cdot \ldots \cdot e^{X_m} = g.$$

Ora, $Lie(G)$ è abeliana, per cui $e^{X_1}e^{X_2} = e^{X_1+X_2}$, e similmente

$$e^{X_1}\cdot \ldots \cdot e^{X_m} = e^{X_1+\ldots+X_m}$$

Quindi basta porre $X = X_1+\ldots+X_m$. Segue: $\exp : Lie(G) \to G$ <u>suriettiva</u>.

Dati $g, h \in G$ scriviamo $g = e^X$, $h = e^Y$ con $X, Y \in Lie(G)$ grazie alla parte precedente. Inoltre X, Y commutano, quindi

$$gh = e^X e^Y = e^{X+Y} = e^{Y+X} = e^Y \cdot e^X = hg$$

cioè G è <u>abeliano</u>.

<u>Att.</u>: <u>non</u> è vero in generale che $G \subseteq Span(Lie(G))$, e <u>neppure</u> $G \subseteq Span(Lie(G) \cup \{I_n\})$.

Per alcuni gruppi è vero, ad es. $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \,\middle|\, c^2+s^2=1 \right\} \subseteq Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{genera} \\ so(2)}}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \right\}$

invece $SO(3)$ <u>non</u> è contenuto in $Span(so(3) \cup \{I_3\})$,

infatti $\exp\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$ ma $\notin Span(so(3) \cup \{I_3\})$.