Es. 1: Sia $c \in \mathbb{R}$ $(c \neq 0)$ e $\beta = c\alpha \in \Phi$. Allora $\dfrac{2(c\alpha, \alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 2c \in \mathbb{Z}$, quindi

$c = \dfrac{n}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Per lo stesso ragionam. con α e β scambiate otteniamo $\dfrac{1}{c} = \dfrac{m}{2}$ con $m \in \mathbb{Z}$,

allora $\dfrac{nm}{4} = 1$, $nm = 4$. Poss. supporre $n, m, c > 0$, e allora:

$n = m = 2$, da cui $\beta = \alpha$

$n = 4$, $m = 1$, da cui $c = 2$, $\beta = 2\alpha$, assurdo.

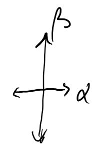
$n = 1$, $m = 4$, da cui $c = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2\beta$, assurdo.

Es. 2: $E' \subseteq E$ sottosp., $s_\alpha(E') = E'$. Supp. $\alpha \notin E'$, e consid.

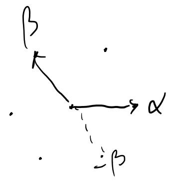
$\beta \in E'$: $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in E' \Rightarrow \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in E'$, visto che

α non è in E' concludiamo $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$ $\forall \beta \in E'$.

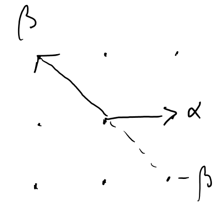
Es. 3:



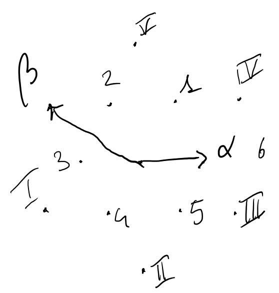
$s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$, $(s_\alpha s_\beta)(s_\alpha s_\beta) = Id$



$(s_\alpha s_\beta)^3(\alpha) = \alpha$ $\quad (s_\alpha s_\beta)^3(\beta) = \beta$ $\quad (\Leftrightarrow s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta)$



$(s_\alpha s_\beta)^4(\alpha) = \alpha$ $\quad (s_\alpha s_\beta)^4(\beta) = \beta$



$(s_\alpha s_\beta)^6(\alpha) = \alpha$ $\quad (s_\alpha s_\beta)^6(\beta) = \beta$

Es. 4: Verifica ovvia degli assiomi.

Es. 5: Altra verifica ovvia degli assiomi, visto che S_α è un'isometria $\forall \alpha \in \Phi$.

Es. 6: 1) $L = \mathfrak{sl}(n)$.

Δ è una base di H^*: facile. Inoltre se $i<j$ la radice $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si scrive come

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) + \dots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) \quad (\text{coeff. tutti } \geq 0!)$$

quindi è una radice positiva. E l'opposto $\varepsilon_j - \varepsilon_i$ è ovviamente negativa

2) Le radici del tipo $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si trattano come nel caso precedente, invece con i, j qualsiasi abbiamo

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_m) + (\varepsilon_j - \varepsilon_m) + 2\varepsilon_m \quad (\text{è positiva})$$

3) Le radici del tipo $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si trattano come nel caso 1), invece per $i \neq j$ abb.

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) + \dots + (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + \varepsilon_m$$

e ε_j analogo, da cui otteniamo anche $\varepsilon_i + \varepsilon_j$.

4) Le radici del tipo $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si trattano come nel caso 1), invece per $i<j$ abb.

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = \underbrace{(\varepsilon_i - \varepsilon_{m-1})}_{=0 \text{ se } \begin{cases} i = m-1 \\ j = m \end{cases}} + \underbrace{(\varepsilon_j - \varepsilon_m)}_{=0 \text{ se } j=m} + (\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m)$$

5) Calcolo facile.

ES. 7: Il gruppo simmetrico agisce in modo naturale su

$\tilde{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ con $\underset{S_n}{\underset{\cap}{\sigma}}(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$ $\forall i$. L'azione è fedele.

E è gen. da $\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$, segue facilmente che E coincide con il S_n-sottomodulo $\{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\} = E \subseteq \tilde{E}$.

C'è un altro S_n-sottomodulo $F \subseteq \tilde{E}$: $F = \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n \mid a_1 = a_2 = \dots = a_n\}$. Vale $\tilde{E} = E \oplus F$ e S_n agisce in modo

banale su F. Segue: l'az. di S_n su E è fedele, cioè $S_n \hookrightarrow GL(E)$.

Calcoliamo ora $s_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \in W$:

$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \frac{2\overbrace{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}^{=-1}}{\underbrace{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}_{=2}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) =$$

$$= (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

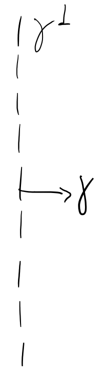
$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

$$\vdots$$

$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$$

Cioè $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$ agisce come $(1\ 2)\in S_n$. Analogam. $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}$ agisce come $(i\ \ i+1)\in S_n$. Allora W contiene l'immagine (isomorfa) di S_n in $GL(E)$, e visto che W è generato da $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}$ $\forall i$ otteniamo $W\cong S_n$.

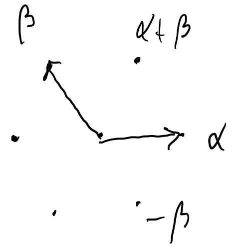
<u>Es. 8</u>: $\sigma\in W$ riflessione risp. a $\gamma\in E\setminus\{0\}$.



Supp. $\gamma^\perp\cap E^{reg}\neq\emptyset$: allora un vettore qualsiasi nell'intersezione è fissato da σ ed è in una camera di Weyl: segue $\sigma=Id_E$, assurdo.

Allora $\gamma^\perp\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Phi}\alpha^\perp$, da cui $\gamma^\perp\subseteq\alpha^\perp$ per una $\alpha\in\Phi$.

<u>Es. 9</u>:



Φ di tipo A_2, $\Delta=\{\alpha,\beta\}$

$\Delta'=\{\alpha+\beta,-\beta\}$

Allora $s_\alpha\in W$ è riflessione semplice per Δ, quindi ha lungh. $=1$ risp. a Δ.

Ma s_α non è riflessione semplice risp. a Δ', perché né α né $-\alpha$ sono in Δ'. Segue: s_α ha lungh. >1 rispetto a Δ'.

Es.10: Δ e $-\Delta$ sono basi diverse, ma hanno lo stesso insieme di riflessioni semplici perché $s_\alpha = s_{-\alpha}$ $\forall \alpha \in \Delta$.