Sol. es. 1: 1) La verifica è immediata.

2) Caso particolare: $G = S_n$ gruppo simmetrico.
Allora $G \cong \{\text{matrici di permutazione}\} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ (isom. solito)
l'isomorfismo è come gruppi, ma l'insieme delle matrici di perm. è un sottoinsieme finito di $GL(n, \mathbb{R})$, per cui la topologia di sottospazio è discreta. Segue che l'isom. solito è anche un omeomorfismo.

Caso G = qualsiasi: si usa il fatto che $G \subseteq S_n$ a meno di isom., per qualche n.

Sol. es. 2:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow GL(1, \mathbb{R}) \; \big(\cong (\mathbb{R}_{\neq 0}, \times) \big) \\ x &\longmapsto (e^x) \leftarrow \text{come matrice } 1 \times 1 \end{aligned}$$

L'immagine è $\{A \in GL(1, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$ che corrisponde all'intervallo $]0, +\infty[$ che è la comp. connessa contenente 1 di $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

Sol. es. 3: Si consideri l'omom.

$$\begin{aligned} O(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \{1, -1\} \\ A &\longmapsto \frac{\det(A)}{|\det(A)|} \end{aligned}$$

Si verifica subito che è un omomorfismo di gruppi, suriettivo (per avere una matrice che va in -1 basta prendere $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = A$),

di nucleo $SO(n, \mathbb{R})$. Segue che $SO(n, \mathbb{R})$ ha indice 2. È un sottogruppo chiuso e connesso, e la sua classe laterale $A \cdot SO(n, \mathbb{R})$ è connessa, chiusa e disgiunta da $SO(n, \mathbb{R})$. Segue che $SO(n, \mathbb{R})$ è una componente connessa di $O(n, \mathbb{R})$.

<u>Sol. es. 4</u>: $SL(n, \mathbb{C})$ è connesso per archi grazie allo stesso ragionam. visto per $SL(n, \mathbb{R})$. Vediamo $GL(n, \mathbb{C})$:

$$\mathbb{C}_{\neq 0} \times SL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

$$(t \quad , \quad A) \longmapsto \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix} \cdot A$$

è suriettiva e il dominio è connesso per archi.

<u>Sol. es. 5</u>: 1) T è chiuso, perché è dato dalla condiz. di annullarsi di due entrate, e $N \setminus T$ è chiuso per motivo analogo.

Segue che $N = T \cup (N \setminus T)$ è chiuso.

Inoltre T è un sottogruppo di indice 2 in N:

$N = T \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T$.

2) T ha 4 comp. connesse:

$$\begin{pmatrix} (>0) & 0 \\ 0 & (>0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (>0) & 0 \\ 0 & (<0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (<0) & 0 \\ 0 & (>0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (<0) & 0 \\ 0 & (<0) \end{pmatrix}$$

Quelle di $N \setminus T$ sono queste, ciascuna moltipl. per $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi N ha in tutto 8 comp. connesse.

3) $N^0 = T^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \ a>0, \ d>0 \right\}$, isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$

tramite $(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$.

4) T ha indice 2 quindi è normale in N. Inoltre

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \ltimes T$$

5) $N \cap SL(2,\mathbb{R})$ non contiene elem. di ordine 2 fuori da T, perché $(N \setminus T) \cap SL(2,\mathbb{R})$

è fatto dalle matrici del tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, e

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $N \cap SL(2,\mathbb{R})$ non può essere prod. semidiretto di $T \cap SL(2,\mathbb{R})$ e un altro sgr (perché quest'altro sgr dovrebbe essere $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e non contenuto in $T \cap SL(2,\mathbb{R})$).

Sol. es. 6: Lo svolgim. è simile, la differenza è nelle comp. connesse:

T è isomorfo a $(\mathbb{C}_{\neq 0})^2$, che è connesso per archi,

e così T e $N \setminus T$ sono le due componenti di N.

Sol. es. 7: Scriviamo $A = B + C$ dove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -2 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $BC = CB$ (verifica: esercizio), quindi

$$e^A = e^{B+C} = e^B e^C.$$

Calcoliamo

$$e^B = \begin{pmatrix} e^1 & & & & \\ & e^1 & & & \\ & & e^1 & & \\ & & & e^{-2} & \\ & & & & e^{-2} \end{pmatrix}$$

(perché B è diagonale)

e $$e^C = C + \frac{1}{2} C^2 + \frac{1}{6} C^3 + \dots$$

e abb. $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$C^3 = 0$, $C^4 = 0$, ecc...

Quindi $e^C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ e infine

$$e^A = \begin{pmatrix} e & -2e & e & 0 & 0 \\ & e & 2e & 0 & 0 \\ & & e & 0 & 0 \\ & & & e^{-2} & e^{-2} \\ & & & & e^{-2} \end{pmatrix}$$

Sol. es. 8 Supp. per assurdo $e^X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

per qualche $X \in M_2(\mathbb{R})$.

Vediamo X come matrice in $M_2(\mathbb{C})$ e consid. $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore, cioè $Xv = \lambda v$ per qualche $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Segue $$e^X v = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{(X^m \cdot v)}_{\lambda^m v} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \lambda^m \right) v = e^\lambda v$$

(la molt. mat x vett. è continua) (la moltipl. scalare x vettore è continua)

Cioè v è autovettore anche di $A = e^X$, di autovalore e^λ.

D'altronde conosciamo gli autovalori di A, c'è solo -1, di autospazio $\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Cioè $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dev'essere autovettore di X di autovalore λ. Segue:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \qquad (\in M_2(\mathbb{C}))$$

con $e^\lambda = -1$, cioè λ è un multiplo dispari di πi.

Ma X del genere <u>non è</u> a entrate reali: <u>assurdo</u>.

<u>Es. 9</u>: Questo è l'analogo su $\mathbb{C}$ di $SL(n,\mathbb{R}) \to SO(n,\mathbb{R})$ visto a lezione. Qui usiamo il metodo di Gram-Schmidt su matrici di $GL(n,\mathbb{C})$, ottenendo matrici in $U(n)$:

$$c : GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow U(n)$$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{w_1}{\|w_1\|} & \cdots & \frac{w_n}{\|w_n\|} \end{pmatrix} = c(A)$$

con $(w_1, \dots, w_n)$ ottenuta con G.-S. da $(v_1, \dots, v_n)$, usando il prod. Hermitiano standard, e analogamente

$$SL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow SU(n)$$

Qui però va spiegato come mai $c(A)$ ha det. 1 se A ha det. 1.

Intanto chiamiamo B la matrice che ha per colonne $w_1, \dots, w_n$. Ric. che il procedim. di Gram-Schmidt è "triangolare", cioè $w_m = v_m + (\text{comb. lin. di } v_1, \dots, v_{m-1})$.

Allora
$$B = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

segue $\det(B) = \det(A)$. Ora

$$c(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|w_1\|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\|w_n\|} \end{pmatrix} \cdot B$$

e $d = \det(c(A))$ soddisfa $d \cdot \bar{d} = 1$ perché $c(A) \in U(n)$, cioè $|d| = 1$. Inoltre

$$d = \det(c(A)) = \frac{\det(B)}{\|w_1\| \cdot \ldots \cdot \|w_n\|} = \frac{1}{\underbrace{\|w_1\| \cdot \ldots \cdot \|w_n\|}_{\in \mathbb{R}_{>0}}}$$

da cui $d \in \mathbb{R}_{>0}$,

ma l'unico numero reale positivo di modulo 1 è 1, cioè $\det(c(A)) = 1$.

In altre parole $c(SL(n, \mathbb{C})) \subseteq SU(n)$.

Es. 10: (sono tutti sgr chiusi)

$$\left.\begin{array}{l} GL(n,\mathbb{R}) \\ GL(n,\mathbb{C}) \end{array}\right\}$$ non è limitato, ad es. $\lambda \cdot I_n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

$$\left.\begin{array}{l} SL(n,\mathbb{R}) \\ SL(n,\mathbb{C}) \end{array}\right\}$$ non è limitato, ad es. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$O(n,\mathbb{R})$ è compatto, le colonne di qualsiasi $A \in O(n,\mathbb{R})$ hanno norma $= 1$ quindi $O(n,\mathbb{R})$ è chiuso e limitato.

$$\left.\begin{array}{l} Sp(2n,\mathbb{R}) \\ Sp(2n,\mathbb{C}) \end{array}\right\}$$ non è limitato, ad es. $\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda \ \ddots \ \lambda}^{n} & & 0 \\ & \lambda^{-1} & \\ 0 & & \ddots \ \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

$$\left.\begin{array}{l} U(n) \\ SU(n) \end{array}\right\}$$ è compatto, le sue colonne hanno norma 1 quindi $U(n)$ è limitato.

$O(n,\mathbb{C})$ non è limitato, ad es.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} c & -s & & 0 & \\ s & c & & & \\ \hline & & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad c^2 + s^2 = 1$$

La condiz. $c^2 + s^2 = 1$ implica una norma limitata su $\mathbb{R}$, ma non su $\mathbb{C}$, ad es. $c = i \cdot \lambda \quad s = \sqrt{1+\lambda^2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

infatti $c^2 = -\lambda^2 \qquad c^2 + s^2 = -\lambda^2 + 1 + \lambda^2 = 1$