Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Soluzione dell'esercizio 3 del foglio di esercizi n.7

Usiamo il secondo teorema di "punto fisso", e poi in più applichiamo anche le tecniche della dimostrazione di quel teorema.

Per il teorema, esiste un autovettore simultaneo v per tutti gli elementi di $R = \mathrm{Rad}(L)$, cioè

$$\mathsf{y}.v = \alpha(\mathsf{y})v$$

per ogni $\mathsf{y} \in R$, con $\alpha\colon R \to k$. In modo simile a quella dimostrazione, definiamo

$$W = \{w \in V \mid \mathsf{y}.w = \alpha(\mathsf{y})w \ \forall \mathsf{y} \in R\}.$$

Sappiamo che $W \neq \{0\}$, dimostriamo che W è un L-modulo con la stessa tecnica della dimostrazione citata. Ripercorriamo tutti i passaggi per essere sicuri che funzionano anche qui. Siano $\mathsf{x} \in L$, $w \in W$ con $w \neq 0$, e consideriamo $\mathsf{x}.w$. Controlliamo se è in W, quindi per un qualsiasi $\mathsf{y} \in R$ calcoliamo

$$\mathsf{y}.(\mathsf{x}.w) = [\mathsf{y},\mathsf{x}].w + \mathsf{x}.(\mathsf{y}.w) = [\mathsf{y},\mathsf{x}].w + \mathsf{x}.\alpha(\mathsf{y})w = \dots$$

Visto che R è un ideale vale $[\mathsf{y},\mathsf{x}] \in R$, per cui

$$\dots = \alpha([\mathsf{y},\mathsf{x}]).w + \alpha(\mathsf{y})\mathsf{x}.w.$$

Dimostriamo che $\alpha([\mathsf{y},\mathsf{x}]) = 0$ considerando la sequenza di sottospazi

$$W_0 = \mathrm{Span}\{w\}, W_1 = \mathrm{Span}\{w, \mathsf{x}.w\}, \dots, W_m = \mathrm{Span}\{w, \mathsf{x}.w, \dots, \mathsf{x}^m.w\}, \dots$$

dove

$$\mathsf{x}^m.w = \underbrace{\mathsf{x}.(\mathsf{x}.(\dots\mathsf{x}}_{m \text{ volte}}.w)\dots)).$$

Per comodità nelle notazioni per i prossimi conti, poniamo anche $W_{-1} = \{0\}$. Vale $\mathsf{x}.W_m \subseteq W_{m+1}$ per ogni $m \geq -1$.

Sia M massimo tale che i vettori $w, \mathsf{x}.w, \dots, \mathsf{x}^M.w$ sono linearmente indipendenti, da questo segue che $\mathsf{x}^{M+1}.w$ è combinazione lineare dei precedenti. Vale $\dim(W_M) \geq 1$, e per costruzione W_M è stabile per l'azione di x. Dimostriamo che W_m è stabile per l'azione di R per induzione su m, anzi dimostriamo che la matrice di y che agisce su W_m è triangolare superiore, con $\alpha(\mathsf{y})$ sulla diagonale, rispetto alla base $(w, \mathsf{x}.w, \dots, \mathsf{x}^m.w)$. Cioè dimostriamo che

$$\mathsf{y}.(\mathsf{x}^m.w) = \alpha(\mathsf{y}).\mathsf{x}^m.w + (\text{vettore in } W_{m-1}).$$

Il caso $m = 0$ è ovvio perché w è autovettore per tutto R, poniamo allora $m > 0$ e calcoliamo

$$\mathsf{y}.(\mathsf{x}^m.w) = \underbrace{[\mathsf{y},\mathsf{x}]}_{\in R}.\underbrace{(\mathsf{x}^{m-1}.w)}_{\in W_{m-1}} + \mathsf{x}.(\mathsf{y}.(\mathsf{x}^{m-1}.w)) =$$

$$(\text{vettore in } W_{m-1}) + \mathsf{x}.\left(\alpha(\mathsf{y})\mathsf{x}^{m-1}.w + (\text{vettore in } W_{m-2})\right) =$$
$$(\text{vettore in } W_{m-1}) + \alpha(\mathsf{y})\mathsf{x}^m.w + \mathsf{x}.(\text{vettore in } W_{m-2}) =$$
$$\alpha(\mathsf{y})\mathsf{x}^m.w + (\text{vettore in } W_{m-1}) + (\text{vettore in } W_{m-1}).$$

Con questo abbiamo dimostrato che W_M è stabile per R e per x, e anche l'affermazione di prima sulla matrice di un qualsiasi $\mathsf{y} \in R$ che agisce su W_M. Segue che la traccia di y che agisce su W_M è uguale a $\alpha(\mathsf{y})$ per la dimensione di W_M.

Riprendiamo ora $[\mathsf{y},\mathsf{x}]$ come sopra, e denotiamo con $X, Y\colon W_M \to W_M$ gli endomorfismi di W_M indotti rispettivamente da x e da y. Osserviamo che $[Y,X]\colon W_M \to W_M$ è l'endomorfismo indotto da $[\mathsf{y},\mathsf{x}]$. Abbiamo visto prima che $\mathrm{tr}([Y,X])$ è uguale a $\dim(W_M) \cdot \alpha([\mathsf{y},\mathsf{x}])$, e visto che $[Y,Z]$ è un commutatore ha traccia nulla.

Segue $\alpha([\mathsf{y},\mathsf{x}]) = 0$, il che conclude la dimostrazione che W è un L-sottomodulo (non nullo). Per irriducibilità di V abbiamo $W = V$, che è quanto volevamo dimostrare.