Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.9

24.11.2023

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Sia L una delle seguenti algebre di Lie: $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n, J_0)$, oppure $\mathfrak{sp}(n, J_1)$ (quest'ultima con n pari). Qui J_0 è la matrice tutta nulla tranne che sulla diagonale secondaria, dove ha tutte entrate uguali a 1, e J_1 è definita allo stesso modo ma sulla diagonale secondaria ha le prime $n/2$ entrate uguali a 1, e le seconde $n/2$ entrate uguali a -1 (andando da in alto a destra verso il basso a sinistra). Sia $H = L \cap \mathfrak{h}(n)$ la sottoalgebra delle matrici diagonali di L. Dimostrare che H è una sottoalgebra torale massimale di L, cioè se K è una sottoalgebra di L contenente H e se K è torale allora $K = H$. (*Suggerimento: dimostrare che H è sottoalgebra abeliana massimale.*)

Esercizio 2. Sia $H = \mathfrak{h}(2) \cap \mathfrak{sl}(2)$, e sia H' una qualsiasi sottoalgebra non nulla di $\mathfrak{sl}(2)$ tale che tutti gli elementi di H' sono semisemplici.

(1) Si dimostri che H' ha dimensione 1.
(2) Si dimostri che esiste $g \in \mathrm{GL}(2)$ tale che $gH'g^{-1} = H$.

Esercizio 3. (1) Scrivere le radici delle algebre L dell'esercizio 1, rispetto alla sottoalgebra torale massimale H indicata, in termini delle applicazioni

$$\varepsilon_i \colon \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \mapsto a_i$$

Attenzione: per $\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(2m)$ e $\mathfrak{so}(2m)$ e anche $\mathfrak{so}(2m+1)$ usare solo $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, osservando che in questi casi ε_i coincide con $-\varepsilon_{n-i}$ su H.

(2) Calcolare $\kappa(\alpha, \beta)$ per tutte le radici trovate, usando le espressioni trovate per α e β in termini degli ε_i e <u>assumendo</u> $\kappa(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{i,j}$.
(3) Usando i valori calcolati nel punto precedente, verificare che questi insiemi di radici verificano le proprietà 1), 2), 3), 4) del teorema di pagina 151 degli appunti.

Esercizio 4. Sia L algebra di Lie semisemplice, e la si scriva come somma diretta di algebre di Lie semplici

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_t.$$

Sia H sottoalgebra torale massimale di L. Si dimostri che $H_i = L_i \cap H$ è una sottoalgebra torale massimale di L_i, per ogni i. Se ne deduca che (a meno di identificazioni naturali)

$$\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_t$$

dove Φ è l'insieme delle radici di L, e Φ_i è l'insieme delle radici di L_i, per ogni i.

Esercizio 5. Sia L algebra di Lie semisemplice e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che $H = N_L(H)$.

Esercizio 6. Sia L algebra di Lie semisemplice non nulla di dimensione ≤ 3. Si dimostri che L è isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Esercizio 7. Si dimostri che non esistono algebre di Lie semisemplici di dimensioni 1, 2, 4, 5, 7.

Esercizio 8. Sia L algebra di Lie semisemplice, e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che

$$\dim(L) \geq 3\dim(H)$$

Per ogni intero positivo n, si trovino L e H tali che $\dim(H) = n$ e $\dim(L) = 3n$.

Esercizio 9. Sia $L \subseteq \mathfrak{so}(8, J_0)$ la sottoalgebra di Lie delle matrici della forma seguente

$$\begin{pmatrix} a_1 & n_7 & n_2 & -n_4 & n_4 & n_5 & n_3 & 0 \\ n_6 & a_1 + a_2 & n_4 & -n_5 & n_5 & n_1 & 0 & -n_3 \\ n_{11} & n_9 & a_2 & n_6 & -n_6 & 0 & -n_1 & -n_5 \\ -n_9 & -n_8 & n_7 & 0 & 0 & n_6 & -n_5 & -n_4 \\ n_9 & n_8 & -n_7 & 0 & 0 & -n_6 & n_5 & n_4 \\ n_8 & n_{12} & 0 & n_7 & -n_7 & -a_2 & -n_4 & -n_2 \\ n_{10} & 0 & -n_{12} & -n_8 & n_8 & -n_9 & -a_1 - a_2 & -n_7 \\ 0 & n_{10} & -n_8 & -n_9 & n_9 & -n_{11} & -n_6 & -a_1 \end{pmatrix}$$

dove $a_1, a_2, n_1, \ldots, n_{12} \in k$. Sia inoltre $H = L \cap \mathfrak{h}(8)$. Si assuma L semisemplice (in realtà è semplice) e si dimostri che H è una sottoalgebra abeliana massimale (essendo anche torale, da questo segue che è torale massimale). Si calcolino le radici di L rispetto alla sottoalgebra H. Quale potrebbe essere una figura[1] in $\mathbb{R}^2$ in qualche senso "abbastanza simmetrica" che corrisponda a queste radici, come l'esagono regolare corrisponde alle radici di $\mathfrak{sl}(3)$?

[1]La figura sarebbe quella che viene calcolando la forma di Killing, ma non richiedo nell'esercizio di calcolarla esplicitamente.