Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.7

10.11.2022

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie qualsiasi. Dimostrare che $\mathrm{Rad}(L) + [L, L] = L$ (somma come spazi vettoriali).

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie risolubile, e sia V un L-modulo irriducibile. Si dimostri che $\dim(V) = 1$.

Esercizio 3. Sia L un'algebra di Lie e V un L-modulo irriducibile. Si dimostri[1] che ogni elemento di $\mathrm{Rad}(L)$ agisce su V come la moltiplicazione per uno scalare.

Esercizio 4. Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ un'algebra di Lie tale che $\mathrm{Rad}(L)$ non è contenuto in $Z(L)$. Si usi l'esercizio precedente per dimostrare che esiste un L-modulo non completamente riducibile.

Esercizio 5. Per questo esercizio sia k un campo di caratteristica p dove p è un numero primo[2] , sia $L = \mathfrak{sl}(2, k)$ e $V = k[X, Y]_p$ lo spazio vettoriale dei polinomi in due variabili, omogenei di grado p. Si consideri V come L-modulo, usando le stesse formule dell'azione di $\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f}$ viste in caratteristica 0, ma si dimostri che qui V non è un L-modulo irriducibile. Si dimostri per $p = 2$ che V non è neppure completamente riducibile.

Esercizio 6. Si calcoli il determinante della forma di Killing di $\mathfrak{sl}(3)$.

Esercizio 7. Si consideri la base usuale $(\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f})$ di $\mathfrak{sl}(2)$, e si calcoli la base duale rispetto alla forma di Killing.

Esercizio 8. Sia $(\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f})$ la base usuale di $\mathfrak{sl}(2)$, e sia $(\mathsf{e}', \mathsf{h}', \mathsf{f}')$ la base duale rispetto alla forma di Killing. Si calcoli l'elemento

$$\mathrm{ad}(\mathsf{e})\,\mathrm{ad}(\mathsf{e}') + \mathrm{ad}(\mathsf{h})\,\mathrm{ad}(\mathsf{h}') + \mathrm{ad}(\mathsf{f})\,\mathrm{ad}(\mathsf{f}').$$

Esercizio 9. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione qualsiasi. Dimostrare che ogni elemento di $V \otimes W$ si può scrivere (in generale **non** in modo unico) come somma

$$\sum_i v_i \otimes w_i$$

per certi vettori $v_i \in V$ e $w_i \in W$.

Esercizio 10. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita, e ricordiamo l'isomorfismo $\mathrm{Hom}(V, W) \cong W \otimes V^*$ dato nel modo seguente: ogni elemento $u \in W \otimes V^*$ si può scrivere come somma

$$u = \sum_i w_i \otimes \eta_i$$

dove $w_i \in W$ e $\eta_i \in V^*$ per ogni i (v. esercizio precedente). Allora questo elemento u si interpreta come l'applicazione lineare

$$\varphi\colon v \mapsto \sum_i \eta_i(v) w_i.$$

[1] Questo esercizio è difficile, suggerisco di risolverlo usando le stesse tecniche della dimostrazione del secondo teorema di "punto fisso".

[2] Questo esercizio è al di fuori del contesto in cui stiamo svolgendo questa parte del corso, e non è essenziale per la comprensione del corso stesso. Consiglio di tentare di rispondere se si vuole avere una prima idea di fenomeni tipici delle algebre di Lie in caratteristica positiva.

(1) Dimostrare che φ ha rango ≤ 1 se e solo se esistono $w \in W$ e $\eta \in V^*$ tali che
$$u = w \otimes \eta.$$
(2) Supponiamo $W = V$, quindi φ è un endomorfismo lineare $V \to V$. Dimostrare che
$$\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_i \eta_i(w_i).$$