Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.6

3.11.2023

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Sia V un modulo per un gruppo oppure un'algebra di Lie. Supponiamo che V sia somma (non necessariamente diretta) di sottomoduli irriducibili

$$V = V_1 + \ldots + V_t$$

Si dimostri che V è completamente riducibile.

Esercizio 2. Sia L algebra di Lie risolubile. Si dimostri che esistono ideali

$$\{0\} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \ldots \subsetneq L_n = L$$

dove $n = \dim(L)$ e $i = \dim(L_i)$ per ogni i.

Esercizio 3. Questo esercizio è stato assegnato a lezione, durante la dimostrazione della decomposizione di Fitting. Per questo motivo, non si può usare detta decomposizione nello svolgimento. Sia T endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Sia $\alpha \in k$, e si consideri $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che

$$\operatorname{Ker}(T - \alpha \operatorname{Id})^m = \operatorname{Ker}(T - \alpha \operatorname{Id})^{m+1}, \quad \operatorname{Im}(T - \alpha \operatorname{Id})^m = \operatorname{Im}(T - \alpha \operatorname{Id})^{m+1}.$$

Ricordiamo che con questa scelta abbiamo $V_\alpha = \operatorname{Ker}(T - \alpha \operatorname{Id})^m$. Si consideri poi la decomposizione

$$V = V_\alpha \oplus W$$

dove $W = \operatorname{Im}(T - \alpha \operatorname{Id})^m$. Si dimostri che $W_\beta = V_\beta$ per ogni $\beta \in k \setminus \{\alpha\}$, e che $W_\alpha = \{0\}$. (*Suggerimento: si usi la proiezione di V su V_α lungo W, e si osservi che per ogni $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i polinomi $(x-\alpha)^m$ e $(x-\beta)^n$ sono coprimi se $\alpha \neq \beta$.*)

Esercizio 4. Sia T endomorfismo di uno spazio vettoriale V, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale stabile per T, cioè tale che $T(W) \subseteq W$. Supponendo che T sia semisemplice, dimostrare che anche la restrizione $T|_W \colon W \to W$ è semisemplice.

Esercizio 5. Siano $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{gl}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale, tali che $[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = 0$. Si dimostri che $(\mathsf{x}+\mathsf{y})_s = \mathsf{x}_s + \mathsf{y}_s$ e $(\mathsf{x}+\mathsf{y})_n = \mathsf{x}_n + \mathsf{y}_n$. Si trovi un esempio in cui queste uguaglianze non sono vere, per due elementi x e y che non commutano.

Esercizio 6. Sia L un'algebra di Lie nilpotente. Si dimostri che $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\mathsf{x}) \operatorname{ad}(\mathsf{y})) = 0$ per ogni $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in L$.

Esercizio 7. Sia L un'algebra di Lie risolubile. Si dimostri che $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\mathsf{x}) \operatorname{ad}(\mathsf{y})) = 0$ per ogni $\mathsf{x} \in [L, L]$ e ogni $\mathsf{y} \in L$.

Esercizio 8. Sia $L = \mathfrak{sl}(n)$ e per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sia $\mathsf{e}_{i,j}$ la matrice elementare tutta nulla tranne che al posto (i, j), dove ha entrata uguale a 1. Dati $i \neq j$, si dimostri che

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\mathsf{e}_{i,j}) \operatorname{ad}(\mathsf{e}_{s,t})) = 0$$

per ogni coppia (s, t) diversa da (j, i).

Esercizio 9. Sia L un'algebra di Lie, sia $\delta \in \operatorname{Der}(L)$ e sia $\mathsf{x} \in L$. Dimostrare che $[\delta, \operatorname{ad}(\mathsf{x})] = \operatorname{ad}(\delta(\mathsf{x}))$.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathfrak{gl}(V)$. Dimostrare che

$$\operatorname{tr}(a \cdot [b, c]) = \operatorname{tr}([a, b] \cdot c).$$