Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.4

20.10.2022

Esercizio 1. Riprendiamo un esercizio precedente, ma stavolta usiamo $\mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$: si consideri l'insieme $\mathfrak{p}$ delle matrici $n \times n$ "a blocchi" della forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove A è una matrice $m \times m$, la matrice B è $m \times (n-m)$, la matrice C è $(n-m) \times (n-m)$, e tutte sono ad entrate in $\mathbb{C}$. Sia infine $P = \mathfrak{p} \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Dimostrare che P è connesso e che $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}$.

Esercizio 2. Sia V un modulo per un gruppo o un'algebra di Lie, su un campo qualsiasi. Siano poi $W, U \subseteq V$ due sottomoduli, tali che W è irriducibile. Dimostrare che $U \cap W$ è uguale a W oppure a $\{0\}$.

Attenzione: per il prossimo esercizio è utile ricordare che in uno spazio vettoriale è definita la somma di un numero qualsiasi n di sottospazi, anche per $n = 0$, cioè è definita la somma di *nessun* sottospazio (!), e per definizione questa somma è uguale a $\{0\}$. Quindi un modulo **nullo**, cioè uguale a $\{0\}$, non è mai irriducibile, ma è sempre **completamente riducibile**, perché è uguale alla somma diretta di *nessun* sottomodulo irriducibile.

Esercizio 3. Sia V modulo di dimensione finita per un gruppo o un'algebra di Lie, su un campo qualsiasi. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) il modulo V è completamente riducibile;
(2) per ogni sottomodulo $W \subseteq V$, esiste un sottomodulo $U \subseteq V$ tale che $V = W \oplus U$.

Esercizio 4. Sia k un campo qualsiasi e si consideri la base[1] $(\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f})$ di $\mathfrak{sl}(2, k)$ formata dalle matrici

$$\mathsf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino le matrici di $\mathrm{ad}(\mathsf{e})$, $\mathrm{ad}(\mathsf{h})$, $\mathrm{ad}(\mathsf{f})$ rispetto a questa base.

Esercizio 5. (*esercizio dato a lezione*) Sia L un'algebra di Lie su un campo k, sia V uno spazio vettoriale su k e sia $\psi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ una rappresentazione di L. Dati η nel duale V^* e $\mathsf{x} \in L$, definiamo come a lezione l'elemento $\mathsf{x}.\eta$ di V^* imponendo che su un vettore qualsiasi $v \in V$ valga

$$(\mathsf{x}.\eta)(v) = \eta(-\mathsf{x}.v)$$

Dimostrare che questo definisce una rappresentazione di L su V^*, cioè un omomorfismo di algebre di Lie $L \to \mathfrak{gl}(V^*)$.

Esercizio 6. (*esercizio dato a lezione*) Sia L un'algebra di Lie qualsiasi, e si definisca

$$\mathrm{ad} \colon L \to \mathfrak{gl}(L)$$

ponendo per ogni $\mathsf{x} \in L$ l'elemento $\mathrm{ad}(\mathsf{x})$ uguale all'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}(\mathsf{x})\colon & L & \to & L \\ & \mathsf{y} & \mapsto & [\mathsf{x}, \mathsf{y}] \end{array}$$

Si dimostri che ad è una rappresentazione di L.

[1] È comune anche la notazione $\mathsf{x}, \mathsf{h}, \mathsf{y}$ per gli stessi elementi di $\mathfrak{sl}(2)$.

Esercizio 7. Sia $\mathsf{x} \in M_n(k)$ dove k è un campo qualsiasi. Consideriamo $M_n(k)$ come algebra associativa, dotandola del prodotto usuale fra matrici (invece che del bracket). Dimostrare che

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}(\mathsf{x})\colon & M_n(k) & \to & M_n(k) \\ & \mathsf{y} & \to & \mathsf{xy} - \mathsf{yx} \end{array}$$

è una derivazione di $M_n(k)$ anche rispetto a questo prodotto.

Esercizio 8. Si consideri $V = k[x, y]_d$ lo spazio dei polinomi in due variabili omogenei di grado d con struttura di $\mathrm{SL}(2, k)$-modulo definita nel foglio 3, dove $k = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Si dimostri che V è un $\mathrm{SL}(2, k)$-modulo irriducibile.

Esercizio 9. Sia $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ una rappresentazione di un gruppo G. Supponiamo che l'immagine $\varphi(G)$ sia contenuta nel gruppo ortogonale $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

(1) Si dimostri che per ogni G-sottomodulo $W \subseteq V = \mathbb{R}^n$ esiste un G-sottomodulo U tale che
$$V = W \oplus U.$$
(2) Si deduca che V è un G-modulo completamente riducibile.

Svolgere l'esercizio anche nel caso $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ assumendo $\varphi(G)$ contenuta in $\mathrm{U}(n)$.

Esercizio 10. Sia k un campo e $A \in \mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{gl}(n, k)$ una matrice simmetrica invertibile. Si denoti con $\mathfrak{so}(A) = \mathfrak{so}(A, k)$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{gl}(n)$ delle matrici X tali che $X \cdot A + A \cdot {}^tX = 0$.

(1) Si dimostri che $\mathfrak{so}(A)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$.
(2) Si dimostri che $\mathfrak{so}(A)$ è isomorfa a $\mathfrak{so}(M \cdot A \cdot {}^tM)$ per ogni $M \in \mathrm{GL}(n, k)$.
(3) Si calcoli la dimensione di $\mathfrak{so}(J)$ e si descrivano esplicitamente le sue matrici, dove
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11. (esercizio **bonus**, difficile)

(1) Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ applicazione bilineare, e sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ derivabile con $\alpha(0) = I_n$. Dati $v, w \in \mathbb{R}^n$, dimostrare che vale
$$\frac{d}{dt}\Big(b(\alpha(t)v, \alpha(t)w)\Big)_{t=0} = b(\alpha'(0)v, w) + b(v, \alpha'(0)w).$$
(2) Sia A algebra di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$ con applicazione bilineare $\beta\colon A \times A \to A$. Consideriamo il gruppo
$$\mathrm{Aut}(A) = \{f\colon A \to A \mid f \text{ automorfismo}\}$$
degli automorfismi di A, cioè delle applicazioni lineari invertibili $f\colon A \to A$ tali che
$$f(\beta(v, w)) = \beta(f(v), f(w))$$
per ogni $v, w \in A$. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(A)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(A)$.
(3) Dimostrare che
$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(A)) = \mathrm{Der}(A)$$
dove $\mathrm{Der}(A)$ è l'insieme delle derivazioni $\delta\colon A \to A$.
(4) Sia $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso. Ridimostrare[2] l'identità di Jacobi per $\mathrm{Lie}(G)$ usando il punto precedente di questo esercizio.

[2]Questo esercizio è una specie di giustificazione "astratta" del perché l'identità di Jacobi vale in $\mathrm{Lie}(G)$, senza passare per la verifica elementare che si basa sul prodotto di matrici.