

Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.2

6.10.2022

Esercizio 1. Si dimostri che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

non è l'esponenziale di alcuna matrice di $M_2(\mathbb{C})$ a traccia nulla. Se ne deduca che

$$\exp: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

non è suriettiva.

Esercizio 2. Siano n, m numeri interi con $1 \leq m < n$, e si consideri l'insieme \mathfrak{p} delle matrici $n \times n$ "a blocchi" della forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove A è una matrice $m \times m$, la matrice B è $m \times (n - m)$, la matrice C è $(n - m) \times (n - m)$, e tutte sono a entrate in un campo k fissato.

- (1) Si dimostri che \mathfrak{p} è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$.
- (2) Si consideri il sottoinsieme \mathfrak{n} di \mathfrak{p} formato dalle matrici tali che A e C sono entrambe matrici nulle. Si dimostri che \mathfrak{n} è un ideale di \mathfrak{p} .
- (3) Si consideri il sottoinsieme \mathfrak{r} di \mathfrak{p} formato dalle matrici tali che A e C sono matrici scalari (possibilmente due scalari differenti). Si dimostri che \mathfrak{r} è un ideale di \mathfrak{p} .

Esercizio 3. Si consideri $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Data l'inclusione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, consideriamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione $2n^2$. Con il bracket usuale è ovviamente un'algebra di Lie su \mathbb{R} , oltre che su \mathbb{C} . Si consideri ora il sottoinsieme

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid A + {}^t\bar{A} = 0\}$$

cioè l'insieme delle matrici *antihermitiane*.

- (1) Si dimostri che si tratta di una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.
- (2) Perché non è una sottoalgebra di Lie se invece consideriamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come algebra di Lie su \mathbb{C} ?

Esercizio 4. Si esibisca un esempio di un sottogruppo chiuso $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (per qualche n) e una matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $e^X \in G$ ma $X \notin \mathrm{Lie}(G)$.

Esercizio 5. (1) Si dimostri che $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}))$ è abeliana e che $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ è abeliano.
(2) Si determini se il gruppo $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ è abeliano.

Esercizio 6. Sia G un gruppo topologico non abeliano, tale che G° sia abeliano e abbia indice 2 in G . Dimostrare che esiste un automorfismo $G^\circ \rightarrow G^\circ$ (come gruppo topologico) diverso dall'identità.

Esercizio 7. Si dimostri che esistono sottogruppi chiusi $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $H \subseteq \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ (per qualche n, m) tali che $\mathrm{Lie}(G)$ è isomorfa a $\mathrm{Lie}(H)$ come algebre di Lie, ma G e H non sono isomorfi come gruppi topologici.

Esercizio 8. Sia $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso.

- (1) Supponiamo G connesso e che $\mathrm{Lie}(G)$ sia un'algebra di Lie abeliana, dimostrare che la mappa esponenziale $\exp: \mathrm{Lie}(G) \rightarrow G$ è suriettiva, e che G è un gruppo abeliano.
- (2) Supponiamo G abeliano, dimostrare che $\mathrm{Lie}(G)$ è un'algebra di Lie abeliana. (*Suggerimento: si consideri il sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ generato da G .*)