Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.11

22.12.2023

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Inoltre E denota uno spazio euclideo, con prodotto scalare $(-,-)$, contenente un sistema di radici Φ con gruppo di Weyl W, e se non specificato altrimenti Δ denota una base di Φ.

Esercizio 1. (1) Si dimostri che esiste un unico elemento $w_0 \in W$ che manda Φ^+ in Φ^-.

(2) Si dimostri che $w_0^2 = \mathrm{Id}$.

(3) Si dimostri che una qualsiasi espressione ridotta di w_0 deve contenere ogni riflessione semplice almeno una volta.

(4) Sia $w \in W$ un elemento qualsiasi, e si consideri un'espressione ridotta $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{\ell(w)}$ (come al solito, le riflessioni semplici che appaiono possono essere eventualmente ripetute). Si dimostri che esiste un'espressione ridotta di w_0 che comincia con quella di w, cioè un'espressione ridotta di w_0 del tipo

$$w_0 = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{\ell(w)} \cdot s_{\ell(w)+1} \cdot \ldots \cdot s_{\ell(w_0)}$$

(5) Si calcoli w_0 per i quattro sistemi di radici visti a lezione in $E = \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Sia $w \in W$ e si scriva w come prodotto di riflessioni semplici (non necessariamente un'espressione ridotta), con t fattori. Si dimostri che t ha la stessa parità[1] di $\ell(w)$.

Esercizio 3. Sia $E = \mathbb{R}^8$ con base canonica $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8$. Definiamo Φ come l'insieme dei vettori del tipo $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ con $i \neq j$ (i segni possono venir scelti in modo indipendente), e anche i vettori del tipo

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{c(i)}\varepsilon_i$$

dove $c(i) \in \{0,1\}$ per ogni i, e la somma $c(1) + \ldots + c(8)$ è pari. Verificare che Φ è un sistema di radici di tipo E_8, con base

$$\Delta = \left\{\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \ldots - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \varepsilon_4 - \varepsilon_3, \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \varepsilon_6 - \varepsilon_5, \varepsilon_7 - \varepsilon_6\right\}.$$

Esercizio 4. Sia $E = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$. Definiamo $J = \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$, e Φ come il sottoinsieme degli $\alpha \in J$ tali che $(\alpha, \alpha) = 1$ oppure 2. Verificare che

$$\begin{aligned}\Phi \quad = \quad & \{\pm\varepsilon_i \mid i \in \{1, \ldots, 4\}\} \cup \\ & \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j \in \{1, \ldots, 4\}\} \cup \\ & \left\{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\right\}\end{aligned}$$

(dove tutti i segni possono venir scelti in modo indipendente), e che Φ è un sistema di radici di tipo F_4, con base

$$\Delta = \left\{\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\right\}$$

Esercizio 5. Sia $E = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Sia J l'insieme degli elementi di $\mathbb{Z}^3$ ortogonali a $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Definiamo Φ come l'insieme degli elementi $\alpha \in J$ tali che $(\alpha, \alpha) = 2$ oppure 6. Verificare che

$$\Phi = \pm\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3, 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}$$

[1] Questa proprietà è una generalizzazione della proprietà usuale della parità di una permutazione.

e che Φ è un sistema di radici di tipo G_2 con base

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$$

Esercizio 6. Sia W il gruppo di Weyl di un sistema di radici, sia Δ una base, e sia

$$w = s_1 s_2 \dots s_t$$

una scrittura ridotta di un elemento $w \in W$ (gli elementi $s_1, \dots, s_t$ sono riflessioni semplici eventualmente ripetute). Denotiamo con α_i la radice semplice della riflessione s_i.

(1) Si dimostri che $s_1 s_2 \dots s_i$ è una scrittura ridotta per ogni $i \in \{1, \dots, t\}$, e che lo stesso vale per $s_t s_{t-1} \dots s_i$.

(2) Si considerino le radici

$$\begin{array}{lcl} \beta_t & = & \alpha_t, \\ \beta_{t-1} & = & s_t(\alpha_{t-1}), \\ \beta_{t-2} & = & (s_t \circ s_{t-1})(\alpha_{t-2}), \\ & \vdots & \\ \beta_1 & = & (s_t \circ \dots \circ s_2)(\alpha_1), \end{array}$$

e si dimostri che $\beta_1, \dots, \beta_t$ sono tutte e sole le radici positive che cambiano segno quando si applica w. (Suggerimento: per dimostrare che sono tutte distinte, si può usare il fatto che $s_{-\alpha} = s_\alpha$.)

Esercizio 7. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base di un sistema di radici Φ, e sia $\Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$.

(1) Si dimostri che $\Delta^\vee$ è una base del sistema di radici[2] $\Phi^\vee$.

(2) Considerando $\Delta^\vee$ come base dello spazio vettoriale E^*, si consideri la base duale $D = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ di E, cioè la base tale che $\langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle$ è uguale a 0 se $i \neq j$, ed è uguale a 1 altrimenti. Si calcolino le coordinate dei vettori di Δ rispetto alla base D.

(3) Nei quattro casi di $E = \mathbb{R}^2$, si calcolino anche le coordinate dei vettori di D rispetto alla base Δ, e si disegnino i vettori di D sul piano. Per quali di questi diagrammi le coordinate sono tutte intere?

Esercizio 8. Siano $L = \mathfrak{sl}(n+1)$, $H = L \cap \mathfrak{h}(n+1)$, e Φ il corrispondente sistema di radici. Si consideri la base Δ vista a lezione del sistema di radici di L:

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\}.$$

(1) Si calcolino i vettori ω_i dell'esercizio precedente, esprimendoli in termini di $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}$.

(2) Si trovi una rappresentazione irriducibile di L tale che $\mathfrak{b} = L \cap \mathfrak{b}(n+1)$ abbia un autovettore simultaneo, in modo che l'autovalore ristretto ad H sia ω_1 (osserviamo che $\mathfrak{b} \supseteq H$). Se ne trovi una tale che questa restrizione sia ω_n.

(3) Se ne trovi una tale che la restrizione sia ω_2 (*difficile; suggerimento: si usi il prodotto tensoriale*).

[2] Gli elementi $\alpha^\vee$ con $\alpha \in \Phi$ si chiamano *coradici*.