Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.10

7.12.2022

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Inoltre E denota uno spazio euclideo, con prodotto scalare $(-,-)$, contenente un sistema di radici Φ con gruppo di Weyl W, e se non specificato altrimenti Δ denota una base di Φ.

Esercizio 1. Si dimostri che per ogni $\alpha \in \Phi$ l'intersezione $(\mathbb{R}\alpha) \cap \Phi$ è uguale a $\{\alpha, -\alpha\}$.

Esercizio 2. Sia α un elemento non nullo di E, e sia $E' \subseteq E$ un sottospazio vettoriale. Si supponga $s_\alpha(E') = E'$, e si dimostri che allora $\alpha \in E'$, oppure tutti i vettori di E' sono ortogonali ad α.

Esercizio 3. Sia E di dimensione 2. Si calcoli l'ordine dell'elemento $s_\alpha s_\beta$ del gruppo di Weyl W, dove $\{\alpha, \beta\} = \Delta$ è una base qualsiasi di Φ.

Esercizio 4. Sia $E' \subset E$ un sottospazio vettoriale, e sia $\Phi' = E' \cap \Phi$. Supponiamo che Φ' generi E' come spazio vettoriale. Si dimostri che allora Φ' è un sistema di radici in E'.

Esercizio 5. Fissata $\alpha \in \Phi$, consideriamo

$$\Phi' = \{\beta \in \Phi \mid (\beta, \beta) = (\alpha, \alpha)\}$$

Sia $E' \subseteq E$ il sottospazio vettoriale generato da Φ'. Si dimostri che Φ' è un sistema di radici in E'.

Esercizio 6. Riprendiamo le matrici J_0 e J_1 come nell'esercizio 1 del foglio 9, e i sistemi di radici calcolati nell'esercizio 3 del foglio 9.

(1) Sia $L = \mathfrak{sl}(n)$ e $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$ con $n = m + 1 \geq 2$. Si consideri il corrispondente sistema di radici Φ. Si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}\}$$

è una base di Φ.

(2) Sia $L = \mathfrak{sp}(n, J_1)$ e $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$, con $n = 2m \geq 2$ pari. Si consideri il corrispondente sistema di radici Φ. Si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, 2\varepsilon_m\}$$

è una base di Φ.

(3) Sia $L = \mathfrak{so}(n, J_0)$ e $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$ con $n = 2m + 1 \geq 3$ dispari. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, \varepsilon_m\}$$

è una base di Φ.

(4) Sia $L = \mathfrak{so}(n, J_0)$ e $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$ con $n = 2m \geq 4$ pari. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m\}$$

è una base di Φ.

(5) Usando un prodotto scalare tale che $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ è ortonormale, calcolare $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$, per ogni base Δ fra quelle qui sopra.

(*Suggerimento per i primi 4 punti: è facile verificare direttamente la definizione di base.*)

Esercizio 7. Sia Φ il sistema di radici di $\mathfrak{sl}(n)$ come nell'esercizio precedente. Si dimostri che il gruppo di Weyl W di Φ è isomorfo al gruppo simmetrico S_n.

Esercizio 8. Sia $\sigma \in W$ e si supponga che σ coincide con la riflessione rispetto all'iperpiano $\gamma^\perp$ ortogonale ad un vettore γ non nullo. Si dimostri che esiste $\beta \in \Phi$ tale che $\beta^\perp = \gamma^\perp$.

Esercizio 9. Trovare un esempio di Φ con due basi e un elemento $w \in W$ che ha lunghezza rispetto a una base diversa dalla lunghezza rispetto all'altra base.

Esercizio 10. Dimostrare che per qualsiasi Φ esistono due basi diverse tali che per ogni $w \in W$ le lunghezze di w rispetto alle due basi sono uguali.