Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.1

29.9.2023

Esercizio 1. Sia G un gruppo finito, e lo si doti della topologia discreta.

(1) Si dimostri che in questo modo si ottiene un gruppo topologico.
(2) Si dimostri che G è isomorfo (come gruppo topologico) a un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ per qualche $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Esercizio 2. Si dimostri che $(\mathbb{R}, +)$ è isomorfo come gruppo topologico alla componente connessa di $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$ contenente l'identità.

Esercizio 3. Per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ si dimostri che $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ è la componente connessa contenente l'identità di $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, e che come sottogruppo ha indice 2.

Esercizio 4. Si dimostri che $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sono connessi per archi.

Esercizio 5. Sia T il sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici invertibili diagonali, e sia N il sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ formato dalle matrici invertibili che sono diagonali oppure della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dimostri che T ed N sono sottogruppi chiusi di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
(2) Si determinino le componenti connesse di T ed N.
(3) Si considerino le componenti connesse rispettivamente di T ed N che contengono la matrice identità, e si descriva di che gruppi topologici si tratta (ad esempio esibendo isomorfismi con gruppi topologici noti).
(4) Si dimostri che T è un sottogruppo normale di N, e si determini se N è un prodotto semidiretto di T per un altro sottogruppo.
(5) Si svolga il punto precedente con $T \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ e $N \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Esercizio 6. Si svolga l'esercizio precedente con il campo $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 7. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si calcoli e^A. (*Suggerimento: si scriva A come somma di due matrici che commutano, e i cui esponenziali sono molto facili da calcolare.*)

Esercizio 8. Si dimostri che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

non è l'esponenziale di alcuna matrice di $M_2(\mathbb{R})$. (*Suggerimento: supponendo per assurdo che $A = e^X$ per una matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$, si studino gli autovalori e gli autovettori di X.*)

Esercizio 9. Ricordiamo la definizione del *gruppo unitario*

$$\mathrm{U}(n) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot {}^t\overline{A} = I_n \right\}$$

e del gruppo *speciale unitario* $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Si dimostri che esistono applicazioni continue e suriettive $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{SU}(n)$. Se ne deduca che $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono connessi per archi.

Esercizio 10. Si determini quali dei seguenti gruppi sono compatti: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, il gruppo ortogonale complesso

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid A \cdot {}^tA = I_n\},$$

e il gruppo simplettico complesso

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) \mid A \cdot J_{2n} \cdot {}^tA = J_{2n}\}$$

dove

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il numero delle entrate uguali a 1 è n.