28.9.'23
1

Esempio: $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}_{\neq 0},\times)$, $(\mathbb{R}_{>0},\times)$, S^1, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}_{\neq 0},\times)$ sono (isomorfi a) sgr chiusi di qualche $GL(n,\mathbb{R})$.

Infatti: $(\mathbb{R}_{\neq 0},\times) \cong GL(1,\mathbb{R})$, $(\mathbb{R}_{>0},\times) \cong \{A \in GL(1,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$

$(\mathbb{C}_{\neq 0},\times) \cong GL(1,\mathbb{C})$.

$$(\mathbb{R},+) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{R})$$

infatti $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\mathbb{C},+) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{C})$$

$$S^1 \cong SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

Come mai ci permettiamo di usare anche $GL(n,\mathbb{C})$, se l'eserc. chiedeva $GL(n,\mathbb{R})$? Perché nel corso vedremo che $GL(n,\mathbb{C})$ è isomorfo a un sgr chiuso di $GL(2n,\mathbb{R})$.

<u>Esempio:</u> $SL(n,\mathbb{R})$, $H = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$, $SO(n,\mathbb{R})$

sono connessi per archi, quindi connessi.

<u>Svolgim.:</u> Fatto di algebra lineare: siano E_{ij} le matrici elem. $n \times n$, cioè E_{ij} ha tutti zeri tranne che al posto (i,j), dove c'è 1.
Allora $SL(n,\mathbb{R})$ è generato come gruppo dalle matrici del tipo $I_n + \alpha E_{ij}$ ($i \neq j \in \{1,\dots,n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$). (Se non lo conoscevate, dimostratelo per esercizio! Sugg.: algoritmo di Gauß).

Usiamo questo fatto per dim. che $SL(n,\mathbb{R})$ è conn. per archi. Sia $g \in SL(n,\mathbb{R})$, scriviamola come

$$g = (I_n + \alpha_1 E_{i_1,j_1}) \cdots (I_n + \alpha_m E_{i_m,j_m})$$

allora $g_t = (I_n + t\alpha_1 E_{i_1,j_1}) \cdots (I_n + t\alpha_m E_{i_m,j_m})$

definisce un cammino continuo

$$[0,1] \longrightarrow SL(n,\mathbb{R})$$
$$t \longmapsto g_t$$

dove $g_0 = I_n$, $g_1 = g$.

Vediamo $\{\det(A) > 0\} = H$: costruiamo

$$]0,+\infty[\times SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow H$$
$$(t, g) \longmapsto \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix} \cdot g$$

E' suriettiva, e il dominio è connesso per archi, quindi H è connesso per archi.

Vediamo $SO(n,\mathbb{R})$: ricordiamo la procedura di Gram-Schmidt di ortogonalizz., applicata a una base qualsiasi $(v_1,\dots,v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ produce una base ortogonale. Inoltre è data da una formula „triangolare":

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = a_{21}v_1 + v_2 \\ w_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + v_3 \\ \vdots \end{cases}$$

e i coeff. $a_{21}, a_{31},\dots$ sono funzioni continue dei vettori $v_1,\dots,v_n$.

Data ora una matrice $A \in SL(n,\mathbb{R})$, interpretiamo le sue colonne come una base $(v_1,\dots,v_n)$ di $\mathbb{R}^n$, e scriviamo $c(A)$ la matrice che ha per colonne $\left(\frac{w_1}{\|w_1\|},\dots,\frac{w_n}{\|w_n\|}\right)$. Questo def. un'applicaz. continua

$$c: SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow O(n,\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto c(A)$$

Se $A \in SO(n,\mathbb{R})$ allora $A = c(A)$, quindi l'immagine di c contiene $SO(n,\mathbb{R})$. D'altronde

$$O(n,\mathbb{R}) = SO(n,\mathbb{R}) \cup \left(O(n,\mathbb{R}) \cap \{\text{matr. a det.} = -1\}\right)$$

unione disgiunta di due sottoinsiemi chiusi e aperti. Sono chiusi e aperti perché sono le controimmagini di

$$\det : O(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \{1, -1\}$$

Visto che $SL(n, \mathbb{R})$ è connesso, abbiamo $c(SL(n, \mathbb{R})) \subseteq SO(n, \mathbb{R})$, cioè possiamo scrivere

$$c : SL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow SO(n, \mathbb{R})$$

e così c è suriettiva (perché $c(A) = A$ se $A \in SO(n, \mathbb{R})$, cioè c è una retrazione).

Segue: $SO(n, \mathbb{R})$ è connesso per archi, perché $SL(n, \mathbb{R})$ lo è.

<u>Esercizio</u>: Rienunciare l'esercizio precedente con matrici su $\mathbb{C}$, cercando di usare le stesse dimostrazioni. In particolare, vanno <u>trovati</u> analoghi „buoni" per H e $SO(n, \mathbb{R})$:

$$SL(n, \mathbb{R}) \rightsquigarrow SL(n, \mathbb{C})$$

$$H \rightsquigarrow ?$$

$$SO(n, \mathbb{R}) \rightsquigarrow ? \quad \text{(NON USARE } SO(n, \mathbb{C}) \text{ !)}$$

(PER CASA)