

Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Soluzione dell'esercizio 2 del foglio di esercizi n.7

Usiamo il secondo teorema di "punto fisso", e poi in più applichiamo anche le tecniche della dimostrazione di quel teorema.

Per il teorema, esiste un autovettore simultaneo v per tutti gli elementi di $R = \text{Rad}(L)$, cioè

$$y.v = \alpha(y)v$$

per ogni $y \in R$, con $\alpha: R \rightarrow k$. In modo simile a quella dimostrazione, definiamo

$$W = \{w \in V \mid y.w = \alpha(y)w \ \forall y \in R\}.$$

Sappiamo che $W \neq \{0\}$, dimostriamo che W è un L -modulo con la stessa tecnica della dimostrazione citata. Ripercorriamo tutti i passaggi per essere sicuri che funzionano anche qui. Siano $x \in L$, $w \in W$ con $w \neq 0$, e consideriamo $x.w$. Controlliamo se è in W , quindi per un qualsiasi $y \in R$ calcoliamo

$$y.(x.w) = [y, x].w + x.(y.w) = [y, x].w + x.\alpha(y)w = \dots$$

Visto che R è un ideale vale $[y, x] \in R$, per cui

$$\dots = \alpha([y, x]).w + \alpha(y)x.w.$$

Dimostriamo che $\alpha([y, x]) = 0$ considerando la sequenza di sottospazi

$$W_0 = \text{Span}\{w\}, W_1 = \text{Span}\{w, x.w\}, \dots, W_m = \text{Span}\{w, x.w, \dots, x^m.w\}, \dots$$

dove

$$x^m.w = \underbrace{x.(x.(x.w))}_{m \text{ volte}}.$$

Per comodità nelle notazioni per i prossimi conti, poniamo anche $W_{-1} = \{0\}$. Vale $x.W_m \subseteq W_{m+1}$ per ogni $m \geq -1$.

Sia M massimo tale che i vettori $w, x.w, \dots, x^M.w$ sono linearmente indipendenti, da questo segue che $x^{M+1}.w$ è combinazione lineare dei precedenti. Vale $\dim(W_M) \geq 1$, e per costruzione W_M è stabile per l'azione di x . Dimostriamo che W_m è stabile per l'azione di R per induzione su m , anzi dimostriamo che la matrice di y che agisce su W_m è triangolare superiore, con $\alpha(y)$ sulla diagonale, rispetto alla base $(w, x.w, \dots, x^m.w)$. Ciò dimostriamo che

$$y.(x^m.w) = \alpha(y)x^m.w + (\text{vettore in } W_{m-1}).$$

Il caso $m = 0$ è ovvio perché w è autovettore per tutto R , poniamo allora $m > 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} y.(x^m.w) &= \underbrace{[y, x]}_{\in R} \cdot \underbrace{(x^{m-1}.w)}_{\in W_{m-1}} + x.(y.(x^{m-1}.w)) = \\ &(\text{vettore in } W_{m-1}) + x.(\alpha(y)x^{m-1}.w + (\text{vettore in } W_{m-2})) = \\ &(\text{vettore in } W_{m-1}) + \alpha(y)x^m.w + x.(\text{vettore in } W_{m-2}) = \\ &\alpha(y)x^m.w + (\text{vettore in } W_{m-1}) + (\text{vettore in } W_{m-1}). \end{aligned}$$

Con questo abbiamo dimostrato che W_M è stabile per R e per x , e anche l'affermazione di prima sulla matrice di un qualsiasi $y \in R$ che agisce su W_M . Segue che la traccia di y che agisce su W_M è uguale a $\alpha(y)$ per la dimensione di W_M .

Riprendiamo ora $[y, x]$ come sopra, e denotiamo con $X, Y: W_M \rightarrow W_M$ gli endomorfismi di W_M indotti rispettivamente da x e da y . Osserviamo che $[Y, X]: W_M \rightarrow W_M$ è l'endomorfismo indotto da $[y, x]$. Abbiamo visto prima che $\text{tr}([Y, X])$ è uguale a $\dim(W_M) \cdot \alpha([y, x])$, e visto che $[Y, Z]$ è un commutatore ha traccia nulla.

Segue $\alpha([y, x]) = 0$, il che conclude la dimostrazione che W è un L -sottomodulo (non nullo). Per irriducibilità di V abbiamo $W = V$, che è quanto volevamo dimostrare.