Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

Raccolta di esercizi d'esame

Esercizio 1. Sia n un intero positivo, e sia $G \subseteq \mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso connesso. Supponiamo che esista un intorno $U \subseteq G$ della matrice identità I_n in G, tale che l'insieme

$$\{g - I_n \mid g \in U\}$$

è contenuto nel sottoinsieme $\mathfrak{b}(n) \subseteq M_n$ delle matrici triangolari superiori.

(1) Dimostrare che $\mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{b}(n)$.
(2) Dimostrare che $G \subseteq B(n)$, dove $B(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ è il sottogruppo delle matrici triangolari superiori invertibili.

Soluzione esercizio 1. (1) A meno di restringere l'intorno U di I_n, possiamo supporre che sia definito il logaritmo $\log|_U \colon U \to V \subseteq \mathrm{Lie}(G)$ dato dalla serie di potenze vista a lezione, che esso sia una biiezione fra U e la sua immagine $V = \log(U)$ con inversa uguale all'esponenziale $\exp|_V \colon V \to U$, e che V sia un intorno di 0 in $\mathrm{Lie}(G)$.

Sia ora $\mathsf{x} \in \mathrm{Lie}(G)$, allora esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $t\mathsf{x} \in V$. Facendo l'esponenziale abbiamo $\exp(t\mathsf{x}) \in U$, da cui $\exp(t\mathsf{x}) - I_n \in \mathfrak{b}(n)$. Ricordiamo che $\log(\exp(t\mathsf{x}))$ è una serie di potenze, precisamente si tratta di potenze della matrice $\exp(t\mathsf{x}) - I_n$; visto che $\exp(t\mathsf{x}) - I_n$ è triangolare superiore, ciascuna di queste potenze è triangolare superiore, e lo è anche il limite della serie.

Visto che $t\mathsf{x} = \log(\exp(t\mathsf{x}))$, otteniamo $t\mathsf{x} \in \mathfrak{b}(n)$, e allora anche $\mathsf{x} \in \mathfrak{b}(n)$.

(2) Sappiamo che U genera G, visto che U è un intorno dell'elemento neutro, e G è connesso. Quindi ogni elemento g di G si scrive come prodotto di matrici di U:

$$g = g_1 \cdots g_m.$$

Per ogni i sappiamo che $g_i - I_n$ è triangolare superiore, ma allora lo è anche g_i. Segue che g è invertibile e triangolare superiore, cioè $g \in B(n)$.

Esercizio 2. Si consideri $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ e la sua rappresentazione usuale su $V = \mathbb{R}^2$ data dall'inclusione $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Si consideri inoltre il G-modulo duale V^*, e si dimostri che V è isomorfo a V^*, cioè che esiste un isomorfismo lineare $V \to V^*$ tale che

$$f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$$

per ogni $v \in V$ e ogni $g \in G$.

Soluzione esercizio 2. Sia $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

e sia (e_1, e_2) la base canonica di $V = \mathbb{R}^2$. Allora

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = ae_1 + ce_2, \qquad Ae_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = be_1 + de_2.$$

Sia ora (η_1, η_2) la base duale. Dato $\eta \in V^*$, ricordiamo che $A \cdot \eta$ è il funzionale $V \to \mathbb{R}$ che manda v in $\eta(A^{-1}v)$. Quindi $A \cdot \eta_1$ è il funzionale che manda v in $\eta_1(A^{-1}v)$.

Ora, la matrice A^{-1} è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

e dato un vettore

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$(A \cdot \eta_1)(v) = \eta_1(A^{-1}v) = \eta_1\left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \eta_1\begin{pmatrix} dx - by \\ -cx + ay \end{pmatrix} = dx - by$$

perché, ricordiamo, η_1 "estrae"la prima entrata del vettore che ha come argomento (ed η_2 estrae la seconda). D'altronde

$$\eta_1(v) = x, \qquad \eta_2(v) = y$$

per cui
$$(A \cdot \eta_1)(v) = d\eta_1(v) - b\eta_2(v) = (d\eta_1 - b\eta_2)(v)$$
che vale per ogni v. Deduciamo la seguente uguaglianza fra vettori di V^*.
$$A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2.$$
Con ragionamento analogo, usando η_2 invece che η_1, otteniamo
$$A \cdot \eta_2 = -c\eta_1 + a\eta_2.$$
(Queste formule in realtà sono già state ottenute a lezione, le ho messe per ripasso.)

Dobbiamo ora creare un'applicazione lineare $f\colon V \to V^*$ per cui valga
$$f(Av) = A \cdot f(v)$$
per ogni $v \in V$. Per definire f basta decidere chi sono $f(e_1)$ e $f(e_2)$. Questi ultimi saranno combinazioni lineari di η_1 ed η_2. Dobbiamo scegliere bene queste combinazioni lineari, quindi cerchiamo di confrontare cosa fa A alla base (e_1, e_2) con quello che fa A alla base (η_1, η_2). Le formule sembrano simili, ma in qualche modo i vettori sono "scambiati", e ci sono segni differenti. Non è chiaro ancora come sfruttare questa somiglianza, e come far fronte a queste differenze.

Ad esempio, facciamo il tentativo $f(e_1) = \eta_1$, $f(e_2) = \eta_2$. Allora
$$f(Ae_1) = f(ae_1 + ce_2) = af(e_1) + cf(e_2) = a\eta_1 + c\eta_2,$$
$$f(Ae_2) = f(be_1 + de_2) = bf(e_1) + df(e_2) = b\eta_1 + d\eta_2$$
mentre
$$A \cdot f(e_1) = A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2,$$
$$A \cdot f(e_2) = A \cdot \eta_2 = -c\eta_1 + a\eta_2.$$
Non va bene, qui $A \cdot f(e_1)$ assomiglia di più a $f(Ae_2)$ che a $f(Ae_1)$. Proviamo allora a scambiare gli indici quando definiamo f, cioè poniamo $f(e_1) = \eta_2$ e $f(e_2) = \eta_1$.

In questo caso
$$f(Ae_1) = f(ae_1 + ce_2) = af(e_1) + cf(e_2) = a\eta_2 + c\eta_1,$$
$$f(Ae_2) = f(be_1 + de_2) = bf(e_1) + df(e_2) = b\eta_2 + d\eta_1$$
e
$$A \cdot f(e_1) = A \cdot \eta_2 = -c\eta_1 + a\eta_2,$$
$$A \cdot f(e_2) = A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2,$$
Adesso quasi corrispondono, c'è solo un problema di segni. Proviamo a cambiare un segno definendo f, cioè poniamo $f(e_1) = -\eta_2$ e $f(e_2) = \eta_1$.

Adesso
$$f(Ae_1) = f(ae_1 + ce_2) = af(e_1) + cf(e_2) = -a\eta_2 + c\eta_1,$$
$$f(Ae_2) = f(be_1 + de_2) = bf(e_1) + df(e_2) = -b\eta_2 + d\eta_1$$
e
$$A \cdot f(e_1) = -A \cdot \eta_2 = c\eta_1 - a\eta_2,$$
$$A \cdot f(e_2) = A \cdot \eta_1 = d\eta_1 - b\eta_2.$$
Qui tutto va come dovrebbe.

La verifica finale, con $v = xe_1 + ye_2$ qualsiasi, segue subito per linearià:
$$f(Av) = f(xAe_1 + yAe_2) = xf(Ae_1) + yf(Ae_2) = x(A \cdot f(e_1)) + y(A \cdot f(e_2)) =$$
$$= A \cdot (xf(e_1) + yfe_2)).$$
L'ultimo passaggio vale perché $\eta \mapsto A \cdot \eta$ è un'applicazione lineare $V^* \to V^*$. Ora applichiamo il fatto che f è lineare, ottenendo
$$\ldots = A \cdot f(xe_1 + ye_2) = A \cdot f(v).$$
Quindi abbiamo effettivamente creato un omomorfismo di G-moduli $f\colon V \to V^*$. Inoltre f manda una base di V in una base di V^*, quindi è un isomorfismo lineare, e pertanto un isomorfismo di G-moduli.

Esercizio 3. Si consideri il sottospazio vettoriale L di $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ generato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si dimostri che L è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$.
(2) Si stabilisca se L è nilpotente, e se è risolubile.
(3) Si consideri $V = \mathbb{C}^3$ come L-modulo in modo naturale, cioè tramite l'inclusione $L \to \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$. Si dimostri che V è un L-modulo completamente riducibile, e si calcoli il numero di addendi di una qualsiasi decomposizione di V in somma diretta di L-moduli irriducibili.

Soluzione esercizio 3. (1) Si verificano direttamente i seguenti bracket:

$$[A,B] = -2A, \qquad [A,C] = B, \qquad [B,C] = -2C.$$

Siano ora $\mathsf{x} = aA + bB + cC$ e $\mathsf{y} = a'A + b'B + c'C$ due elementi qualsiasi di L, con $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{C}$. Dalla bilinearità del bracket deduciamo che $[\mathsf{x},\mathsf{y}]$ è combinazione lineare di $[A,B], [A,C], [B,C]$, che sono tutti elementi di L. Quindi $[\mathsf{x},\mathsf{y}]$ è un elemento di L. Segue che L è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$.

(2) Dai conti fatti nel punto precedente si vede che gli elementi A, B, C sono essi stessi dei bracket di elementi di L, ad esempio

$$\left[A, -\frac{1}{2}B\right] = A.$$

Da questo otteniamo che $[L,L] = L$, e allora tutti i termini della serie derivata e anche tutti i termini della serie centrale discendente sono uguali a L. Sono anche non nulli, perché $L \neq \{0\}$. Per questo L non è né nilpotente né risolubile.

(3) L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ è isomorfa a L, tramite l'applicazione lineare $\varphi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to L$ data da $\mathsf{e} \mapsto A$, $\mathsf{h} \mapsto B$, $\mathsf{f} \mapsto C$, dove $(\mathsf{e},\mathsf{h},\mathsf{f})$ è la base usuale di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Infatti i bracket calcolati prima per A, B, C corrispondono a quelli visti tante volte a lezione fra $\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f}$, quindi φ è un omomorfismo di algebre di Lie, inoltre φ è suriettiva perché L è generata da A, B, C come spazio vettoriale, ed è iniettiva perché A, B, C sono linearmente indipendenti[1]. Concludiamo che L è semisemplice, e grazie al Teorema di Weyl sappiamo che V è un L-modulo completamente riducibile.

Visto che $L \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, possiamo applicare a L la teoria degli $\mathfrak{sl}(2)$-moduli. Questa ci dice che il numero di addendi di una decomposizione di V in somma diretta di irriducibili è dato da $\dim(V_0) + \dim(V_1)$, dove V_0 e V_1 sono i sottospazi di V dove h agisce per moltiplicazione per uno scalare, rispettivamente $= 0$ e $= 1$. Qui la matrice B corrisponde all'elemento h, quindi basta calcolare le dimensioni dei B-autospazi di V.

Il polinomio caratteristico $\det(B - xI_3)$ di B è uguale a $-x^3 + 4x = -x(x-2)(x+2)$, per cui B ha autovalori $2, 0, -2$. Ciascuno dei corrispondenti autospazi ha dimensione almeno 1, ma V stesso ha dimensione 3, per cui questi autospazi non possono che avere tutti dimensione 1. Quindi V_0

Concludiamo che V ha un solo addendo irriducibile, cioè V stesso è un L-modulo irriducibile.

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie di dimensione finita, e supponiamo che esista un ideale I di L tale che $L = Z(L) \oplus I$ (come spazi vettoriali).

(1) Si dimostri che se $I \neq \{0\}$ allora I non è abeliano.
(2) Si dimostri che se $I \neq \{0\}$ allora I non è nilpotente.
(3) Si costruisca un esempio in cui $I \neq \{0\}$ e $Z(L) \neq \{0\}$, e l'ideale I è risolubile.

Soluzione esercizio 4. (1) Supponiamo per assurdo che I sia abeliano e non nullo. Sia $\mathsf{x} \in I$ qualsiasi, e sia $\mathsf{y} \in L$ qualsiasi. Possiamo scrivere

$$\mathsf{y} = \mathsf{y}_I + \mathsf{y}_Z$$

[1] Per dimostrare che φ è iniettiva si può persino evitare di verificare l'indipendenza lineare di A, B, C, grazie al ragionamento seguente. Visto che A, B, C sono matrici non tutte nulle, φ non è l'applicazione nulla. Il suo nucleo pertanto è un ideale proprio di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, che però è semplice, quindi il nucleo di φ è uguale a $\{0\}$.

dove $\mathsf{y}_I \in I$ e $\mathsf{y}_Z \in Z(L)$. Allora

$$[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = [\mathsf{x}, \mathsf{y}_I + \mathsf{y}_Z] = [\mathsf{x}, \mathsf{y}_I] + [\mathsf{x}, \mathsf{y}_Z] = \dots$$

Ma $[\mathsf{x}, \mathsf{y}_I] = 0$ perché I è abeliano, e $[\mathsf{x}, \mathsf{y}_Z] = 0$ perché $\mathsf{y}_Z \in Z(L)$. Quindi le uguaglianze di prima proseguono così:

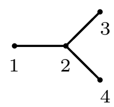
$$\dots = 0 + 0 = 0.$$

Segue che x è nel centro $Z(L)$ di L, ma allora $\mathsf{x} = 0$ perchè $I \cap Z(L)\{0\}$. Cioè $I = \{0\}$, assurdo.

(2) Supponiamo I nilpotente e non nullo. Ricordiamo che l'ultimo termine non nullo J della sua serie centrale discendente è abeliano, ed è anche un ideale di L. Vale comunque $J \cap Z(L) = \{0\}$. Si può però applicare a qualsiasi elementi $\mathsf{x} \in J$ il ragionamento del punto precedente, il che implica $\mathsf{x} = 0$. Cioè $J = \{0\}$, assurdo.

(3) Consideriamo l'algebra di Lie $L = \mathfrak{b}(2)$: il suo centro è fatto dalle sole matrici scalari, e L ha un ideale risolubile $I = L \cap \mathfrak{sl}(2)$, tale che $Z(L) \oplus I = L$.

Esercizio 5. Sia Φ un sistema di radici di tipo D_4, e si scelga una base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ numerata nel modo seguente:



(1) Sia $\gamma = l\alpha_1 + m\alpha_3 + n\alpha_4$ con l, m, n interi positivi. Si dimostri che γ non è una radice.
(2) Si dimostri che $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ è una radice.
(3) Si trovi un elemento w del gruppo di Weyl tale che $w(\beta)$ sia nella chiusura della camera fondamentale.

Soluzione esercizio 5. (1) Calcoliamo $s_1(\gamma)$, sfruttando il fatto che α_1 è ortogonale sia ad α_3 sia ad α_4:

$$s_1(\gamma) = l s_1(\alpha_1) + m s_1(\alpha_3) + n s_1(\alpha_4) = -l\alpha_1 + m\alpha_3 + n\alpha_4$$

ma questa non può essere una radice, perché è combinazione lineare di radici semplici con alcuni coefficienti positivi e altri negativi. Per questo γ non può essere una radice.

(2) Cerchiamo di ottenere β da una radice semplice, usando una sequenza di riflessioni semplici. Proviamo a partire da α_1. Ricordiamo che $\langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle = -1$, da cui

$$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Allo stesso modo, ricordando i valori di $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$ dati dal diagramma di Dynkin, otteniamo

$$s_3(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

e

$$s_4(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $s_4(\alpha_1) = \alpha_1$, $s_4(\alpha_3) = \alpha_3$, e $s_4(\alpha_2) = \alpha_4 + \alpha_2$. Segue che β è una radice.

(3) Troviamo prima il segno di (β, α_i) per ogni i: se fossero tutti numeri non negativi avremmo che β stessa è nella chiusura della camera fondamentale. Inoltre (β, α_i) ha lo stesso segno di $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle$, che possiamo calcolare direttamente dal diagramma di Dynkin. Abbiamo:

$$\langle \beta, \alpha_1^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_4, \alpha_1^\vee \rangle = 2 - 1 + 0 + 0 = 1$$

e analogamente

$$\langle \beta, \alpha_3^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha_4^\vee \rangle = 1,$$

però

$$\langle \beta, \alpha_2^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_2^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle + \langle \alpha_4, \alpha_2^\vee \rangle = -1 + 2 - 1 - 1 = -1$$

quindi β non è nella chiusura della camera fondamentale.

Cerchiamo allora di cambiare β per spostarla nella camera fondamentale, iniziando con riflessioni semplici. Abbiamo

$$s_1(\beta) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

e

$$\langle \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1^\vee \rangle = -1 + 0 + 0 = -1$$

quindi neppure $s_1(\beta)$ è nella chiusura della camera fondamentale. Analogamente $s_3(\beta)$, $s_4(\beta)$ non sono nella chiusura della camera fondamentale.

Invece

$$s_2(\beta) = (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_2) + (\alpha_4 + \alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta'.$$

Abbiamo

$$\langle \beta', \alpha_1^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle + \langle 2\alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_4, \alpha_1^\vee \rangle = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$$

e analogamente

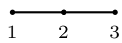
$$\langle \beta', \alpha_3^\vee \rangle = \langle \beta', \alpha_4^\vee \rangle = 0,$$

e stavolta

$$\langle \beta', \alpha_2^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle + \langle 2\alpha_2, \alpha_2^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle + \langle \alpha_4, \alpha_2^\vee \rangle = -1 + 4 - 1 - 1 = 1$$

quindi β' è nella chiusura della camera fondamentale, e l'elemento w richiesto è $w = s_2$.

Esercizio 6. Sia Φ un sistema di radici di tipo A_3, e si scelga una base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ numerata nel modo seguente:



(1) Si trovino tutte le radici positive di Φ.
(2) Si dimostri che $w = s_2 s_3 s_1$ ha lunghezza 3, dove s_i è la riflessione rispetto alla radice α_i.
(3) Si trovi un'espressione ridotta di w diversa da $s_2 s_3 s_1$.

Soluzione esercizio 6. (1) Iniziamo applicando riflessioni semplici alle radici semplici. Chiaramente tralasciamo $s_i(\alpha_i)$, e anche $s_i(\alpha_j)$ se α_i e α_j sono ortogonali. Otteniamo:

$$s_1(\alpha_2) = s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad s_3(\alpha_2) = s_2(\alpha_3) = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Proviamo ad applicare altre riflessioni semplici a queste radici positive non semplici. Di solito ci fanno "tornare indietro", ad esempio $s_1(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$. L'unico caso in cui non riotteniamo qualcosa di già noto è il seguente:

$$s_3(\alpha_1 + \alpha_2) = s_1(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Si verifica facilmente che questo completa la lista delle radici positive: agendo con riflessioni semplici non riusciamo ad ottenere alcuna altra radice positiva. Per cui

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}.$$

Ricordando che stiamo considerando il sistema di radici di $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$, questo corrisponde alle 6 entrate delle matrici sopra la diagonale.

(2) Calcoliamo il numero di radici positive che cambiano segno dopo aver applicato w:

$$\begin{array}{lcl} w(\alpha_1) & = & s_2(s_3(-\alpha_1)) = s_2(-\alpha_1) = -\alpha_1 - \alpha_2 \\ w(\alpha_2) & = & s_2(s_3(\alpha_1 + \alpha_2))) = s_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ w(\alpha_3) & = & -\alpha_2 - \alpha_3 \\ w(\alpha_1 + \alpha_2) & = & \alpha_3 \\ w(\alpha_2 + \alpha_3) & = & \alpha_1 \\ w(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) & = & -\alpha_2 \end{array}$$

Tre cambiano segno, per cui $\ell(w) = 3$.

(3) Ricordiamo che α_1 ed α_3 sono ortogonali, per cui s_1 ed s_3 commutano. Infatti:

$$s_1(s_3(x)) = s_1(x - \langle x, \alpha_3^\vee \rangle \alpha_3) = x - \langle x, \alpha_3^\vee \rangle \alpha_3 - \langle x, \alpha_1^\vee \rangle \alpha_1 = s_3(s_1(x))$$

per ogni x. Quindi w è anche uguale a $s_2 s_1 s_3$, che è una scrittura ridotta (perché contiene ancora 3 riflessioni semplici) diversa da quella data.

Esercizio 7. Sia n un intero maggiore di 1 e sia G il sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ delle matrici tali che ogni riga e ogni colonna contengono ciascuna esattamente un'entrata non nulla.

(1) Dando per buono che G è un sottogruppo chiuso in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, dimostrare che l'algebra di Lie di G è l'insieme $\mathfrak{h}(n)$ delle matrici diagonali $n \times n$.
(2) Determinare l'immagine della mappa esponenziale $\mathrm{Exp}(\mathrm{Lie}(G)) \subset G$, e dimostrare che non genera G come gruppo.

Soluzione esercizio 7. (1) Dimostriamo l'inclusione $\mathrm{Lie}(G) \supseteq \mathfrak{h}(n)$. Osserviamo prima di tutto che G contiene tutte le matrici diagonali invertibili. Siano $A \in \mathfrak{h}(n)$ e $t \in \mathbb{R}$, allora tA e tutte le sue potenze sono matrici diagonali. Segue che $\mathrm{Exp}(tA)$ è una matrice diagonale invertibile, quindi un elemento di G. Concludiamo che $\mathfrak{h}(n)$ è contenuta in $\mathrm{Lie}(G)$.

Dimostriamo ora l'inclusione opposta $\mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{h}(n)$. Dimostriamo prima di tutto che la componente connessa G° contenente l'identità è l'insieme di tutte le matrici diagonali con entrate positive sulla diagonale. Infatti questo insieme è connesso, essendo omeomorfo al prodotto di n copie dell'intervallo aperto $]0,+\infty[$. Inoltre è chiuso in G, perché può essere descritto come il sottoinsieme delle matrici di G tali che tutte le entrate fuori dalla diagonale sono nulle, e quelle sulla diagonale sono ≥ 0 (allora saranno automaticamente > 0). Infine questo insieme è anche aperto in G, perché può essere anche descritto come il sottoinsieme delle matrici di G tali che tutte le entrate sulla diagonale sono > 0.

D'altronde $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^\circ)$, quindi dimostriamo che $\mathrm{Lie}(G^\circ) \subseteq \mathfrak{h}(n)$. A tal fine, sia $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che l'asse cartesiano $\mathbb{R}e_i$ è un G-sottomodulo di $\mathbb{R}^n$ per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$, quindi dev'essere anche un $\mathrm{Lie}(G^\circ)$-sottomodulo. Ma questo implica che ogni matrice di $\mathrm{Lie}(G^\circ)$ è diagonale, da cui otteniamo l'inclusione voluta.

(2) L'esponenziale di una matrice diagonale $A \in \mathfrak{h}(n)$ è facile da calcolare: è la matrice diagonale che ha entrate $e^{a_1},\ldots,e^{a_n}$, dove $a_1,\ldots,a_n$ sono le entrate sulla diagonale della matrice A. Segue immediatamente che $\mathrm{Exp}(\mathrm{Lie}(G)) = G^\circ$, che è un sottogruppo proprio di G per cui non genera G.

Esercizio 8. L'algebra di Lie *di Heisenberg* è definita come un'algebra di Lie L di dimensione 3 su $\mathbb{C}$, con base (u,v,w) e bracket determinato dalle formule seguenti: $[u,v] = w$, $[u,w] = 0$, $[v,w] = 0$.

(1) Determinare se L è semisemplice, se è risolubile, se è nilpotente, giustificando ogni volta la risposta.
(2) Sia V un L-modulo irriducibile di dimensione finita. Dimostrare che V ha dimensione 1.
(3) Dimostrare che w agisce su V come l'operatore nullo.

Soluzione esercizio 8. (1) Calcoliamo la serie centrale discendente $L^1 = [L,L]$ è lo spazio vettoriale generato dai bracket degli elementi di L, e per bilinearità L^1 è anche generato come spazio vettoriale dai bracket degli elementi della base data di L. Quindi L^1 è generato da w. Per lo stesso argomento, il secondo termine $L^2 = [L,L^1]$ è generato da $[u,w],[v,w],[w,w]$, che sono tutti nulli. Quindi L è nilpotente, e anche risolubile. Concludiamo anche che non è semisemplice, essendo nilpotente.

Per essere precisi, qui va osservata la cosa seguente: un'algebra risolubile (e anche nilpotente) *potrebbe* essere semisemplice (!), ma l'unico caso in cui questo avviene è se ha dimensione 0. Qui L è risolubile e ha dimensione diversa da 0, quindi non è semisemplice.

(2) Sia V un L-modulo irriducibile di dimensione finita, e sia $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ la rappresentazione. Sappiamo che L è risolubile, quindi $\varphi(L)$ è risolubile. Per il Teorema di Lie, esiste una base di V in cui tutti gli elementi di $\varphi(L)$ sono triangolari superiori. Sia v il primo elemento di una tale base, segue che l'"asse cartesiano" $\mathbb{C}v$ è un L-sottomodulo non nullo di V, da cui $V = \mathbb{C}v$.

(3) Sappiamo che $w \in [L,L]$, da cui segue $\varphi(w) \in [\varphi(L),\varphi(L)]$. Scegliendo una base di V e identificando V con $\mathbb{C}$, abbiamo $\varphi(L) \subseteq \mathfrak{gl}(1)$ e $[\varphi(L),\varphi(L)] \subseteq \mathfrak{sl}(1) = \{0\}$. Da questo segue $\varphi(w) = 0$.

Esercizio 9. Sia Φ un sistema di radici in uno spazio euclideo E. Data una base Δ di Φ, sia w_0 l'elemento del gruppo di Weyl che manda la camera di Weyl fondamentale C nel suo opposto $-C$.

(1) Si dimostri che $w_0(\Delta) = -\Delta$, dove

$$-\Delta = \{-\alpha \mid \alpha \in \Delta\}.$$

(2) Supponendo che Φ sia irriducibile di tipo B_n oppure C_n dove n è un intero maggiore di 1, si dimostri che
$$w_0(\alpha) = -\alpha$$
per ogni $\alpha \in \Delta$, cioè che $w_0 \colon E \to E$ è la moltiplicazione per -1.

Soluzione esercizio 9. (1) Ricordiamo che C è definita come la camera di Weyl tale che $\Delta = \Delta(\gamma)$ per qualsiasi $\gamma \in C$, e chiaramente $-\Delta = \Delta(\eta)$ per ogni $\eta \in -C$. Osserviamo che $w_0(C) = -C$ implica $w_0(\gamma) \in -C$, e dalla definizione di $\Delta(\gamma)$ segue immediatamente $w_0(\Delta(\gamma)) = \Delta(w_0(\gamma))$. Concludiamo che $w_0(\Delta)$ è la base $\Delta(\eta)$ con $\eta = w_0(\gamma)$, cioè $w_0(\Delta) = -\Delta$.

(2) Dal punto precedente concludiamo che $w_0(\alpha)$ è l'opposto di una radice semplice, per ogni α radice semplice. Non è detto a priori però che $w_0(\alpha) = -\alpha$: questo è proprio quello che vogliamo dimostrare nel nostro caso, cioè in tipo B_n oppure C_n.

Partiamo da α_n con la solita numerazione delle radici semplici: si tratta della radice semplice corta in tipo B_n (tutte le altre sono lunghe), e si tratta invece della radice semplice lunga in tipo C_n (tutte le altre sono corte).

Visto che $w_0(\alpha_n)$ ha la stessa lunghezza di α_n, otteniamo che $w_0(\alpha_n)$ è l'unica radice corta opposto di una qualche radice semplice (in tipo B_n) oppure l'unica radice lunga opposto di una qualche radice semplice (in tipo C_n). In entrambi i casi segue $w_0(\alpha_n) = -\alpha_n$.

Ora analizziamo $w_0(\alpha_{n-1})$: è diversa da $-\alpha_n$ (perché w_0 è una biiezione) e si tratta dell'opposto di una radice semplice, non ortogonale a $w_0(\alpha_n)$. L'unica possibilità è che $w_0(\alpha_{n-1})$ sia $-\alpha_{n-1}$. Un ragionamento analogo vale per $w_0(\alpha_{n-2})$, via via fino a $w_0(\alpha_1)$. In conclusione, $w_0(\alpha) = -\alpha$ per ogni $\alpha \in \Delta$.

Visto che Δ è una base di E, abbiamo che w_0 è la moltiplicazione per -1.

Esercizio 10. Sia n un intero positivo e sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ tali che le prime $n-1$ colonne sono tutte nulle, ed è nulla anche l'entrata alla riga n, colonna n (l'angolo in basso a destra).

(1) Si dimostri che L è una sottoalgebra di Lie abeliana di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.
(2) Si dimostri che la mappa esponenziale è una biiezione fra L e la sua immagine $\mathrm{Exp}(L)$, e si trovi un sottogruppo chiuso connesso G di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $L = \mathrm{Lie}(G)$.
(3) Si consideri $V = \mathbb{R}^n$ come G-modulo tramite l'inclusione $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Si trovi un G-sottomodulo $W \subseteq V$ tale che *non esiste* alcun G-sottomodulo $U \subseteq V$ tale che $V = W \oplus U$.

Soluzione esercizio 10. (1) Si verifica immediatamente che $AB = BA = 0$ per ogni $A, B \in L$, e ovviamente allora $[A, B] = 0$. Quindi L è una sottoalgebra di Lie abeliana di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(2) Data $A \in L$, abbiamo $A^2 = 0$ per cui $\mathrm{Exp}(A) = I_n + A$. Segue immediatamente che Exp è una biiezione $L \to \mathrm{Exp}(L)$, di inversa $B \mapsto B - I_n$. Inoltre $G = \mathrm{Exp}(L)$ è l'insieme delle matrici uguali all'identità tranne che per l'ultima colonna, in cui le prime $n-1$ entrate sono a piacere e l'ultima è uguale a 1. Si verifica subito che questo è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, ed è chiuso perché si può descrivere imponendo che l'entrata al posto (i, j) sia uguale a $\delta_{i,j}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e ogni $j \in \{1, \dots, n-1\}$, e anche per $i = n, j = n$.

Verifichiamo che $\mathrm{Lie}(G) = L$. Sappiamo che $\mathrm{Exp}(tA) \in G$ per ogni $A \in L$, da cui $L \subseteq \mathrm{Lie}(G)$. Ora confrontiamo le dimensioni di L (come spazio vettoriale) e di G (come varietà differenziabile): sono entrambe uguali a $n-1$, da cui segue $\mathrm{Lie}(G) = L$.

Vediamo una dimostrazione alternativa dell'altra inclusione $\mathrm{Lie}(G) \subseteq L$, senza usare il fatto che G è una varietà differenziabile, e senza usare la sua dimensione. Fissata la base canonica $(e_1, \dots, e_n)$ di $\mathbb{R}^n$, sappiamo che $\mathbb{R}e_i$ è un G-sottomodulo per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$, per cui è anche un $\mathrm{Lie}(G)$-sottomodulo. Questo implica che $\mathrm{Lie}(G)$ è contenuta nell'insieme delle matrici del tipo
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

L'esponenziale di una matrice del genere ha sulla diagonale le entrate $e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}$. Visto che devono essere tutte uguali a 1, concludiamo che $a_1 = \ldots = a_n = 0$, cioè l'inclusione voluta $\mathrm{Lie}(G) \subseteq L$.

(3) Basta prendere $W = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Supponiamo per assurdo che esista $U \subseteq V$ tale che $V = W \oplus U$, e sia $u \in U \setminus \{0\}$. Scriviamo

$$u = c_1 e_1 + \ldots + c_{n-1} e_{n-1} + c_n e_n$$

con $c_i \in \mathbb{R}$ per ogni i, allora $c_n \neq 0$. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} c_n & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & c_n & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = e_n$$

quindi $e_n \in U$. Inoltre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e_n = e_1 + e_n$$

quindi $e_1 + e_n \in U$, da cui anche $e_1 \in U$. Analogamente si ottiene $e_i \in U$ per ogni i. Segue $U = V$: assurdo.

Esercizio 11. Sia $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ somma diretta di algebre di Lie.

(1) Si determini per quali valori di $\eta, \xi \in \mathbb{C}$ l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L & \to & \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ (\mathsf{x}, \mathsf{y}) & \mapsto & \eta\mathsf{x} + \xi\mathsf{y} \end{array}$$

è un omomorfismo di algebre di Lie.

(2) Sia $\varphi \colon L \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ un omomorfismo di algebre di Lie (non necessariamente della forma data nel punto precedente). Si dimostri che il nucleo di φ contiene la sottoalgebra $\{0\} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ di L oppure la sottoalgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \{0\}$.

(3) Si determini per quali interi positivi n esistono omomorfismi di algebre di Lie iniettivi $L \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Soluzione esercizio 11. (1) Risolvere prima il punto (2) sarebbe utile, perché sapremmo automaticamente che $\eta = 0$ oppure $\xi = 0$. Da qui concluderemmo facilmente che ci sono solo tre possibilità: $\eta = \xi = 0$, oppure $\eta = 1$ e $\xi = 0$, oppure $\eta = 0$ e $\xi = 1$.

Vediamo uno svolgimento alternativo che non richiede il punto (2). Ricordiamo la base $(\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f})$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Abbiamo:

$$\varphi([(\mathsf{e}, \mathsf{e}), (\mathsf{f}, \mathsf{f})]) = \varphi([\mathsf{e}, \mathsf{f}], [\mathsf{e}, \mathsf{f}]) = \varphi(\mathsf{h}, \mathsf{h}) = (\eta + \xi)\mathsf{h}$$

e anche

$$\varphi([(\mathsf{e}, \mathsf{e}), (\mathsf{f}, \mathsf{f})]) = [\varphi(\mathsf{e}, \mathsf{e}), \varphi(\mathsf{f}, \mathsf{f})] = [(\eta + \xi)\mathsf{e}, (\eta + \xi)\mathsf{f}] = (\eta + \xi)^2\mathsf{h}$$

Concludiamo $(\eta+\xi)^2 = \eta+\xi$. Osserviamo che abbiamo usato soltanto l'uguaglianza $[\mathsf{e}, \mathsf{f}] = \mathsf{h}$. Con conti simili usando ad es. l'uguaglianza $[\mathsf{h}, \mathsf{e}] = 2\mathsf{e}$ potremmo ottenere altre condizioni su η e ξ, con la speranza di restringere molto le possibilità per η e ξ. Vi invito a provare!

È possibile però anche estrarre altre informazioni dalla formula già usata $[\mathsf{e}, \mathsf{f}] = \mathsf{h}$. È un metodo istruttivo quindi vediamo i dettagli.

Siano $x, y, z, t \in \mathbb{C}$ e usiamoli per riscalare le matrici che abbiamo usato. Cioè, analogamente a prima, facciamo:

$$\varphi([(x\mathsf{e}, y\mathsf{e}), (z\mathsf{f}, t\mathsf{f})]) = \varphi([x\mathsf{e}, z\mathsf{f}], [y\mathsf{e}, t\mathsf{f}]) = \varphi(xz\mathsf{h}, yt\mathsf{h}) = (xz\eta + yt\xi)\mathsf{h}$$

e

$$\varphi([(x\mathsf{e}, y\mathsf{e}), (z\mathsf{f}, t\mathsf{f})]) = [\varphi(x\mathsf{e}, y\mathsf{e}), \varphi(z\mathsf{f}, t\mathsf{f})] = [(x\eta + y\xi)\mathsf{e}, (z\eta + t\xi)\mathsf{f}] = (x\eta + y\xi)(z\eta + t\xi)\mathsf{h}$$

da cui otteniamo

$$xz\eta + yt\xi = xz\eta^2 + xt\eta\xi + yz\xi\eta + yt\xi^2$$

cioè

$$xz(\eta - \eta^2) + yt(\xi - \xi^2) - xt\eta\xi - yz\xi\eta = 0$$

che vale per ogni $x, y, z, t \in \mathbb{C}$. Possiamo vedere l'espressione ottenuta come un polinomio nelle variabili x, y, z, t, che dev'essere il polinomio nullo visto che deve fare sempre 0 se sostituiamo alle variabili valori qualsiasi. I coefficienti pertanto devono essere nulli, cioè

$$\eta = \eta^2, \qquad \xi = \xi^2, \qquad \eta\xi = 0.$$

Dall'ultima uguaglianza otteniamo $\eta = 0$ oppure $\xi = 0$. Notiamo anche che $\eta = \eta^2$, cioè $(\eta - 1)\eta = 0$, è verificata solo se $\eta = 0$ oppure $\eta = 1$, e similmente l'uguaglianza $\xi = \xi^2$.

Concludendo: se $\eta = \xi = 0$ abbiamo ovviamente un omomorfismo di algebre di Lie. Se uno dei due è non nullo, allora dev'essere uguale a 1, e l'altro deve essere nullo. Quindi le altre possibilità sono solo $\eta = 1$ e $\xi = 0$, oppure $\eta = 0$ e $\xi = 1$, e in entrambi i casi si vede facilmente che abbiamo effettivamente omomorfismi di algebre di Lie.

(2) Considerato che L ha dimensione 6 e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ha dimensione 3, l'omomorfismo φ non può essere iniettivo. Quindi il suo nucleo è un ideale di L di dimensione positiva. Sappiamo che un'algebra di Lie semisemplice è somma diretta di algebre di Lie semplici, e gli ideali sono le somme di alcuni di queste algebre di Lie semplici. Quindi gli ideali di L sono $0 \oplus 0$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \{0\}$, $\{0\} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Il nucleo di L è fra questi ma non è il primo di essi, quindi contiene sicuramente $\{0\} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ oppure $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \{0\}$.

(3) Osserviamo che L ha dimensione 6, invece $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ha dimensione $n^2 - 1$. Quindi non ci possono essere omomorfismi iniettivi $L \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Se $n \geq 4$ allora è facile costruire un omomorfismo iniettivo come richiesto: basta mandare la coppia $(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \in L$ nella matrice a blocchi tutta nulla, tranne che per i primi due blocchi 2×2 sulla diagonale, in cui si mettono x e y rispettivamente.

Rimane il problema di determinare se esiste un omomorfismo iniettivo $\varphi \colon L \to \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, e questa parte è molto più difficile del resto del compito. *Per questo motivo l'ho data all'esame ma nella correzione dello scritto ho considerato questa parte solo come un bonus per eventuali punti in più.*

Iniziamo ricordando che la decomposizione astratta di Jordan-Chevalley nelle algebre di Lie semisemplici è compatibile con le rappresentazioni. Questo dice che se $\mathsf{x} \in L$ è un elemento semisemplice (per definizione, questo è equivalente ad essere ad-semisemplice), allora $\varphi(\mathsf{x})$ è un elemento semisemplice di $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Di nuovo, questo è equivalente ad essere un elemento ad-semisemplice di $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Ora, sappiamo che L contiene una sottoalgebra torale di dimensione 2, cioè la somma $H = (\mathfrak{h}(2) \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \oplus (\mathfrak{h}(2) \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Allora $\varphi(H)$ è una sottoalgebra (abeliana) torale di dimensione 2 di $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Cioè a meno di cambiare base di $\mathbb{C}^3$, l'immagine $\varphi(H)$ è contenuta nelle matrici diagonali. D'altronde sappiamo che $\mathfrak{h}(3) \cap \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ha dimensione 2, per cui $\varphi(H) = \mathfrak{h}(3) \cap \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

In altre parole $\varphi(L)$ è una sottoalgebra di Lie di $M = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ contenente $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(3) \cap \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Visto che è una sottoalgebra di Lie contenente $\mathfrak{h}$, l'immagine $\varphi(L)$ è stabile per $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$, quindi $\varphi(L)$ è somma di $\mathfrak{h}$ e di alcuni spazi di radici M_α per certe radici α di M. Sia Ψ l'insieme delle radici di M tali che

$$\varphi(L) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} M_\alpha.$$

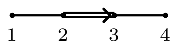
Visto che L ha dimensione 6, l'insieme Ψ ha 4 elementi. Inoltre, sappiamo che Ψ deve essere chiuso rispetto alla somma, cioè se α, β sono in Ψ e se $\alpha + \beta$ è una radice allora $\alpha + \beta$ deve essere in Ψ. Questa è una conseguenza immediata della formula $[M_\alpha, M_\beta] = M_{\alpha+\beta}$, perché se M_α e M_β sono in $\varphi(L)$ allora ci deve stare anche $M_{\alpha+\beta}$.

Osservando il sistema di radici di M, che è fatto dai vertici di un esagono regolare, otteniamo che Ψ deve essere fatto nel modo seguente: deve esserci una radice α e il suo opposto $-\alpha$, poi un'altra radice β che forma un angolo ottuso con α, e la radice $\alpha + \beta$. (Ad esempio, Ψ non potrebbe essere fatto dalle radici α, $-\alpha$, β, $-\beta$ perché $\alpha + \beta$ è una radice e allora deve stare in Ψ.)

Una base di $\varphi(L)$ dunque è $(\mathsf{h}_\alpha, \mathsf{h}_\beta, \mathsf{e}_\alpha, \mathsf{f}_\alpha, \mathsf{e}_\beta, \mathsf{e}_{\alpha+\beta})$. Eseguendo i bracket di questi elementi, vediamo facilmente che la sottoalgebra derivata $[\varphi(L), \varphi(L)]$ di $\varphi(L)$ ha per base $(\mathsf{h}_\alpha, \mathsf{e}_\alpha, \mathsf{f}_\alpha, \mathsf{e}_\beta, \mathsf{e}_{\alpha+\beta})$, quindi $[\varphi(L), \varphi(L)]$ è diversa da $\varphi(L)$. Ma L e la sua immagine omomorfa $\varphi(L)$ sono semisemplici, per cui otteniamo un assurdo.

Quindi non esistono omomorfismi iniettivi $L \to \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Esercizio 12. Sia Φ un sistema di radici di tipo F_4, sia $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}$ una base con le radici semplici numerate nel modo seguente:



(1) Si dimostri che $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ è una radice.
(2) Si determini per quali valori di $n, m \in \mathbb{Z}$ l'elemento $n\alpha_2 + m\alpha_3$ è una radice.

Soluzione esercizio 12. (1) Ricordiamo che l'unica entrata della matrice di Cartan fuori dalla diagonale e diversa da 0 e da -1 è $\langle \alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle = -2$. Dimostriamo che $\beta = s_1(s_2(s_3(\alpha_4)))$. Abbiamo

$$s_3(\alpha_4) = \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $\langle \alpha_4, \alpha_3^\vee \rangle = -1$, poi

$$s_2(\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $\langle \alpha_4, \alpha_2^\vee \rangle = 0$ e $\langle \alpha_4, \alpha_3^\vee \rangle = -1$, poi

$$s_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

perché $\langle \alpha_4, \alpha_1^\vee \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = 0$ e $\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -1$. Dato ogni elemento del gruppo di Weyl manda radici in radici, otteniamo che β è una radice.

(2) Qui si può usare l'analisi vista a lezione dei possibili angoli fra radici e i loro rapporti fra le lunghezze. Sappiamo che

$$\frac{\|\alpha_2\|^2}{\|\alpha_3\|^2} = 2$$

e che l'angolo fra α_2 e α_3 è ottuso. Segue che α_2 e α_3 sono radici semplici di un sistema di radici Ψ di tipo B_2 (i vertici di un quadrato e i punti medi dei lati), contenuto nel sottospazio vettoriale E' generato da α_2 e α_3.

Tutte le radici di Ψ si ottengono da α_2 e α_3 applicando ripetutamente le riflessioni s_2 ed s_3, quindi Ψ è contenuto in Φ. Inoltre $\Phi \cap E'$ è un sistema di radici sul piano E', ma nessun sistema di radici nel piano contiene strettamente un sistema di radici di tipo B_2. Quindi $\Phi \cap E' = \Psi$, cioè Ψ è proprio l'insieme delle radici di Φ che sono combinazioni lineari di α_2 e α_3. Segue che le radici volute sono

$$\pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_2 + 2\alpha_3).$$

Esercizio 13. (1) Sia L un'algebra di Lie, e sia I un ideale di L contenuto in $Z(L)$. Si dimostri che, se L/I ha dimensione 1, allora L è abeliana.
(2) Sia M un'algebra di Lie qualsiasi. Si deduca dall'enunciato precedente che[2] $M/Z(M)$ ha dimensione diversa da 1.
(3) Si esibisca un'algebra di Lie N tale che $N/[N, N]$ ha dimensione 1.

Soluzione esercizio 13. Parte (1). Sia $x \in L \setminus I$. Allora la classe laterale $x + I$ è una base dello spazio vettoriale L/I, cioè ogni elemento di L/I è del tipo $a \cdot x + I$ con $a \in k$. In altre parole, ogni elemento di L si può scrivere come somma di un multiplo di x e di un elemento di I.

Siano allora $y, z \in L$. Scriviamo

$$y = ax + i, \qquad z = bx + j$$

con $a, b \in k$ e $i, j \in I$. Abbiamo

$$[y, z] = [ax + i, bx + j] = ab[x, x] + [ax, j] + [i, bx] + [i, j] = \dots$$

Il primo addendo è ovviamente nullo, e gli altri tre sono nulli perché I è contenuto nel centro di L. Segue

$$\dots = 0$$

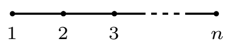
[2]Questo enunciato è l'analogo, per le algebre di Lie, del fatto che $G/Z(G)$ non è mai ciclico, se G è un gruppo.

cioè L è abeliana.

Parte (2). Supponiamo per assurdo che $M/Z(M)$ abbia dimensione 1, in particolare $Z(M) \neq M$. Applicando all'ideale $Z(M)$ di M la parte (1), otteniamo che M è abeliana: assurdo.

Parte (3). Sia N di dimensione 1. Allora N è abeliana, la sua algebra derivata è $\{0\}$, e $N/[N,N]$ ha dimensione 1.

Esercizio 14.
Sia n un intero positivo e sia Φ un sistema di radici di tipo A_n. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



Sia $w = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_2$, dove s_i è la riflessione semplice rispetto alla radice semplice α_i per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(1) Si dimostri che $\theta = w(\alpha_1)$ soddisfa $\theta \geq \alpha_i$ per ogni i.
(2) Si trovi per quali $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha $\theta - \alpha_i \in \Phi$.
(3) Si dimostri che θ è nella chiusura della camera di Weyl fondamentale.

Soluzione esercizio 14. Parte (1). Il diagramma di Dynkin implica che tutte le radici semplici hanno la stessa lunghezza, che $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$ se $|i-j| = 1$, e che $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = 0$ se $|i-j| \geq 2$. Deduciamo che

$$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_3(s_2(\alpha_1)) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \ldots$$

e per induzione

$$\theta = w(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Quindi

$$\theta - \alpha_1 = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$
$$\theta - \alpha_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$$

e per ogni $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ abbiamo

$$\theta - \alpha_j = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1}) + (\alpha_{j+1} + \ldots + \alpha_n)$$

In ogni caso, questi elementi sono combinazioni lineari a coefficienti non negativi di radici semplici, cioè $\theta - \alpha_i \geq 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Parte (2). Osserviamo che

$$\alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (s_n \circ \ldots \circ s_3)(\alpha_2)$$

(con stessa dimostrazione fatta nella parte (1)), e che

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} = (s_{n-1} \circ \ldots \circ s_2)(\alpha_1)$$

quindi $\theta - \alpha_1$ e $\theta - \alpha_n$ sono radici.

Sia ora $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Abbiamo

$$\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} = (s_{j-1} \circ \ldots \circ s_2)(\alpha_1)$$

e

$$\gamma = \alpha_{j+1} + \ldots + \alpha_n = (s_n \circ \ldots \circ s_{j+2})(\alpha_{j+1})$$

Quindi β e γ sono radici. Sappiamo inoltre che ogni radice qui ha la stessa lunghezza, perché ogni radice può essere mandata in una radice semplice da un elemento del gruppo di Weyl.

D'altronde β e γ sono ortogonali, quindi la loro somma non può avere la loro stessa lunghezza. Deduciamo che $\theta - \alpha_j$ non è una radice.

Parte (3). Dobbiamo calcolare i prodotti scalari fra θ e le radici semplici. Sia

$$C = \frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{2}$$

e osserviamo che

$$C = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}$$

per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Allora abbiamo

$$(\alpha_i, \alpha_j) = C \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$$

per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Segue:

$$(\theta, \alpha_1) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \alpha_1) = C(2 - 1 + 0 + \ldots + 0) = C > 0$$

e

$$(\theta, \alpha_n) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \alpha_n) = C(0 + \ldots + 0 - 1 + 2) = C > 0$$

Inoltre, per $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, abbiamo

$$(\theta, \alpha_j) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \alpha_j) = C(0 + \ldots + 0 - 1 + 2 - 1 + 0 + \ldots + 0) = 0$$

quindi θ è nella chiusura della camera di Weyl fondamentale.

Esercizio 15. Si considerino le seguenti sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}(2)$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in k \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in k \right\}.$$

(1) Si dimostri che L ed M non sono semplici.
(2) Si dimostri che L ed M non sono isomorfe.
(3) Sia N un'algebra di Lie di dimensione 2. Si dimostri che N è isomorfa a L oppure a M.

Soluzione esercizio 15. (1) L è abeliana, quindi non è semplice. M contiene $\mathfrak{b}^u(2)$ che si verifica facilmente essere un ideale di M, quindi M non è semplice.
(2) M non è abeliana, quindi non è isomorfa ad L.
(3) Se N è abeliana, si ottiene un isomorfismo con L mandando una base qualsiasi di N nelle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Altrimenti $[N, N]$ ha dimensione 1 (si fa vedere subito che ogni commutatore è un multiplo scalare del commutatore di due elementi della base). Sia u base di $[N, N]$, e completiamo u ad una base u, z di N, e abbiamo che $[z, u]$ è un multiplo scalare di u. Inoltre $[z, u] \neq 0$, altrimenti N sarebbe abeliana, quindi $[z, u] = cu$ con $c \neq 0$. Allora $[\frac{z}{c}, \frac{u}{c}] = \frac{1}{c^2}[z, u] = \frac{u}{c}$. Rimpiazziamo allora u con $\frac{u}{c}$ e z con $\frac{z}{c}$, e otteniamo $[z, u] = u$.

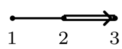
Otteniamo un isomorfismo con M mandando z in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e u in

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 16.
Sia Φ un sistema di radici di tipo B_3 in uno spazio euclideo E. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



(1) Si dimostri che $\beta = \alpha_2 + \alpha_3$ è una radice, e si determini se è lunga o corta (suggerimento: si usi l'azione del gruppo di Weyl).
(2) Si dimostri che β e α_1 formano una base di un sistema di radici Ψ (nel sottospazio di E generato da esse).
(3) Si calcoli $s_\beta(\alpha_1)$, e si determini se è nella chiusura della camera di Weyl fondamentale del sistema di radici Φ.

Soluzione esercizio 16. (1) Ricordiamo $\langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = -1$ dal diagramma di Dynkin, quindi

$$s_{\alpha_2}(\alpha_3) = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_2 = \beta.$$

Inoltre β è una radice corta perché ha la stessa lunghezza di α_3.

(2) Il rapporto $\|\alpha_1\|^2/\|\beta\|^2$ è 2. Infatti α_1 è lunga e β è corta, ed è lo tesso rapporto che c'è fra α_2 ed α_3, che formano una base di un sistema di radici di tipo B_2. Il prodotto scalare fra α_1 e β inoltre è uguale a quello fra α_1 e α_2, visto che α_1 e α_3 sono ortogonali. Segue facilmente

$$\langle \alpha_1, \beta^\vee \rangle = 2\frac{(\alpha_1, \beta)}{(\beta, \beta)} = 2\frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{(\beta, \beta)} = 4\frac{(\alpha_1, \alpha_2)(\beta, \beta)}{(\alpha_1, \alpha_1)(\beta, \beta)} = 2\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -2$$

e con un calcolo ancora più elementare risulta $\langle \beta, \alpha_1^\vee \rangle = -1$. Usando l'uguaglianza di Cauchy-Schwarz, l'angolo fra α_1 e β risulta essere $3\pi/4$, e dato il rapporto delle loro lunghezze concludiamo che sono una base di un sistema di radici di tipo B_2.

(3) Abbiamo

$$s_\beta(\alpha_1) = \alpha_1 - \langle \alpha_1, \beta^\vee \rangle \beta = \alpha_1 + 2\beta$$

che in effetti corrisponde al risultato che si vede facilmente in un sistema di radici di tipo B_2. Vediamo se i prodotti scalari con le radici semplici sono non negativi, o equivalentemente vediamo se le coradici semplici assumono valori non negativi:

$$\langle \alpha_1 + 2\beta, \alpha_1^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle + 2\langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = 2 - 2 + 0 = 0;$$
$$\langle \alpha_1 + 2\beta, \alpha_2^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_2^\vee \rangle + 2\langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = -1 + 4 - 2 = 1;$$
$$\langle \alpha_1 + 2\beta, \alpha_3^\vee \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_3^\vee \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle + 2\langle \alpha_3, \alpha_3^\vee \rangle = 0 - 4 + 4 = 0;$$

quindi la risposta è "sì".

Esercizio 17. Sia L un'algebra di Lie, e sia $M \subseteq L$ una sottoalgebra di Lie semisemplice.

(1) Si dimostri che $M \cap \mathrm{Rad}(L) = \{0\}$.
(2) Si consideri $\mathrm{Rad}(L)$ come M-modulo, tramite la rappresentazione aggiunta ad. Si dimostri che, se $\mathrm{Rad}(L)$ è un M-modulo irriducibile, allora $\mathrm{Rad}(L)$ è abeliano.
(3) Supponiamo che $\mathrm{Rad}(L) \neq \{0\}$. Si dimostri che $\mathrm{Rad}(L)$ ha un M-sottomodulo non banale, che è anche un ideale abeliano di $\mathrm{Rad}(L)$.

Soluzione esercizio 17. (1) L'intersezione $M \cap \mathrm{Rad}(L)$ è un ideale di M ed è risolubile, per cui è nulla.

(2) Ricordiamo che $\mathrm{Rad}(L)$ è un ideale di L. Il suo commutatore $K = [\mathrm{Rad}(L), \mathrm{Rad}(L)]$ è anch'esso un ideale di L, come abbiamo visto a lezione. Per cui K è un sottomodulo per ad, anche se considerata solo su M. Se $\mathrm{Rad}(L)$ è un M-modulo irriducibile, allora $\mathrm{Rad}(L) \neq \{0\}$, e abbiamo le possibilità $K = \mathrm{Rad}(L)$ oppure $K = \{0\}$. La prima è impossibile, perché allora avremmo che la serie derivata di $\mathrm{Rad}(L)$ non termina con $\{0\}$. Quindi $K = \{0\}$, cioè $\mathrm{Rad}(L)$ è abeliano.

(3) Per lo stesso motivo di prima, l'ultimo termine non banale della serie derivata di $\mathrm{Rad}(L)$ è un ideale di L, quindi anche un M-sottomodulo, ed è abeliano.

Esercizio 18. Sia (e, h, f) la base usuale di $\mathfrak{sl}(2)$, e si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi in due variabili X, Y. Si definisca l'applicazione lineare

$$\varphi\colon \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(V)$$

data sugli elementi della base nel modo seguente:

$$\varphi(e) = X\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \varphi(h) = X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \varphi(f) = Y\frac{\partial}{\partial X}.$$

Quindi ad esempio se

$$p = p(X, Y) = XY^2$$

allora

$$\varphi(e)(p) = X \cdot \frac{\partial p}{\partial Y} = 2X^2Y.$$

(1) Si dimostri che φ è una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2)$.
(2) Si dimostri che esistono, per ogni d intero non negativo, sottomoduli $V_d \subset V$ di dimensione finita, tali che

$$V = \bigcup_{d=0}^{\infty} V_d.$$

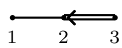
(3) Si dimostri che esistono, per ogni d intero non negativo, sottomoduli *irriducibili* $U_d \subset V$ di dimensione finita, tali che
$$V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} U_d.$$
Si trovino anche i pesi massimali degli U_d trovati.

Soluzione esercizio 18. (1) Le proprietà dei commutatori della base solita (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$ si verificano immediatamente. Ad esempio
$$\left[X\frac{\partial}{\partial Y}, Y\frac{\partial}{\partial X}\right] = \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) - \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) =$$
$$X\left(\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial^2}{\partial Y \partial X}\right) - Y\left(\frac{\partial}{\partial Y} + X\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\right) = X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}$$
che corrisponde a $[e, f] = h$.

(2) Osserviamo che tutti gli operatori $\varphi(e)$, $\varphi(h)$, $\varphi(f)$ conservano il grado totale dei polinomi. Quindi basta prendere per V_d il sottospazio dei polinomi di grado $\leq d$.

(3) Prendiamo per U_d il sottospazio dei polinomi *omogenei* di grado d. Si tratta effettivamente di un sottomodulo, di dimensione $d+1$, ed è somma diretta di sottomoduli irriducibili. È facile dimostrare direttamente che U_d stesso è irriducibile, possiamo però farlo in modo indiretto. Consideriamo $X^d \in U_d$: è un vettore massimale ed è un h-autovettore di autovalore d, quindi U_d contiene l'$\mathfrak{sl}(2)$-modulo semplice di peso più alto d. D'altronde questo sottomodulo ha proprio dimensione $d+1$, quindi coincide con U_d.

Esercizio 19. Sia Φ un sistema di radici di tipo C_3 in uno spazio euclideo E. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



(1) Si trovino in Φ due radici ortogonali e di ugual lunghezza, tali che la somma è una radice.

(2) Si consideri la radice $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$. Si trovi un elemento del gruppo di Weyl, espresso come prodotto di riflessioni semplici, che manda β in una radice semplice.

Soluzione esercizio 19. (1) Il sistema di radici Φ contiene un sistema di radici di tipo B_2, contenente le radici α_2 ed α_3. Ricordando com'è fatto un sistema di radici di quel tipo, la somma $\alpha_2 + \alpha_3$ è una radice corta, ortogonale ad α_2. Alternativamente, si può osservare che $\alpha_2 + \alpha_3 = s_{\alpha_3}(\alpha_2)$, e che $\langle \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = 2 - 2 = 0$

(2) Scrivendo $s_i = s_{\alpha_i}$, abbiamo
$$s_2(\beta) = \beta - \langle \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle \alpha_2 = \beta - (-1 + 4 - 2)\alpha_2 = \beta - \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \gamma$$
(Osserviamo che β è ortogonale ad α_1 e ad α_3, per cui provare con le altre riflessioni non avrebbe spostato β.) Andiamo avanti:
$$s_3(\gamma) = \gamma - \langle \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3^\vee \rangle \alpha_3 = \gamma - (0 - 1 + 2)\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = \delta,$$
e allo stesso modo concludiamo $s_1(\delta) = \alpha_2$. Quindi un elemento come richiesto è $s_1 s_3 s_2$.