Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Esame scritto

7.7.2023

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia n un intero positivo, sia $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ un sottogruppo a un parametro di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

(1) Supponiamo che per ogni intero positivo $k > 0$ la matrice $\xi\left(\frac{1}{k}\right)$ sia in $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. Dimostrare che allora la matrice
$$\left.\frac{d}{dt}\xi(t)\right|_{t=0}$$
è in $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$.

(2) Supponiamo esista un numero reale $t > 0$ tale che $\xi(t)$ sia la matrice identità. Dimostrare che allora l'immagine $\xi(\mathbb{R})$ di ξ è un sottoinsieme limitato di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Soluzione esercizio 1. (1) Sappiamo che esiste (unica) una matrice $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ tale che
$$\xi(t) = e^{tA}$$
per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi le ipotesi dell'esercizio implicano che
$$e^{\frac{1}{k}A} \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$$
per ogni k intero positivo. Inoltre sappiamo che esiste un intorno U di I_n in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e un intorno V di 0 in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ tali che l'esponenziale è una biiezione $V \to U$, con inversa il logaritmo, in modo tale che l'esponenziale manda $V \cap \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ in $U \cap \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$.

Se k è abbastanza grande, abbiamo
$$e^{\frac{1}{k}A} \in U \cap \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$$
per cui possiamo applicare il logaritmo, e otteniamo
$$\log\left(e^{\frac{1}{k}A}\right) = \frac{1}{k}A \in V \cap \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$$
da cui segue
$$A \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}).$$
D'altronde
$$\left.\frac{d}{dt}\xi(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}e^{tA}\right|_{t=0} = A$$
quindi otteniamo
$$\left.\frac{d}{dt}\xi(t)\right|_{t=0} \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}).$$

(2) Dato $s \in \mathbb{R}$ qualsiasi, lo "approssimiamo" con multipli interi di t_0. Cioè prendiamo $a \in \mathbb{Z}$ il massimo intero tale che $at_0 \leq s$. Ponendo $b = s - at_0$, abbiamo
$$s = at_0 + b$$
e $b \in [0, t_0]$ (in realtà b è in $[0, t_0[$). Abbiamo
$$\xi(s) = \xi(at_0 + b) = \xi(at_0)\cdot\xi(b) = \underbrace{\xi(t_0)\cdot\xi(t_0)\cdot\ldots\cdot\xi(t_0)}_{a \text{ volte}}\cdot\xi(b)$$
se $a > 0$, e invece abbiamo
$$\xi(s) = \xi(at_0 + b) = \xi(at_0)\cdot\xi(b) = \underbrace{\xi(-t_0)\cdot\xi(-t_0)\cdot\ldots\cdot\xi(-t_0)}_{|a| \text{ volte}}\cdot\xi(b)$$
se $a < 0$. La matrice $\xi(t_0)$ è l'identità, e anche la matrice $\xi(-t_0) = \xi(t_0)^{-1}$ è l'identità. Questo implica
$$\xi(s) = \xi(b).$$

Ne consegue che i valori assunti da ξ per qualsiasi $s \in \mathbb{R}$ sono già tutti assunti per $s \in [0, t_0]$, cioè l'immagine $\xi(\mathbb{R})$ di ξ è uguale a $\xi([0, t_0])$. L'applicazione ξ è continua e $[0, t_0]$ è un intervallo compatto, quindi la norma di $\xi(s)$ al variare di s in $[0, t_0]$ assume un massimo finito. Segue che l'immagine di ξ è un insieme limitato.

Esercizio 2. Sia L una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, dove n è un intero positivo. Dato un vettore $v \in \mathbb{C}^n$, denotiamo con $\mathbb{C}v$ il sottospazio vettoriale generato da v in $\mathbb{C}^n$, e definiamo

$$\mathfrak{p} = \{\mathsf{x} \in L \mid \mathsf{x}(v) \in \mathbb{C}v\}, \qquad \mathfrak{n} = \{\mathsf{x} \in L \mid \mathsf{x}(v) = 0\}.$$

(1) Dimostrare che $\mathfrak{n}$ è un ideale di $\mathfrak{p}$ e che $\mathfrak{n}$ contiene $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$.
(2) Dimostrare che se $\mathfrak{n}$ è risolubile allora anche $\mathfrak{p}$ è risolubile.
(3) Dimostrare che se $\mathfrak{p}$ è semisemplice allora $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}$.

Soluzione esercizio 2. (1) Intanto osserviamo che $\mathfrak{n}$ è un sottoinsieme di $\mathfrak{p}$, perché se $\mathsf{x}(v) = 0$ allora $\mathsf{x}(v) \in \mathbb{C}v$. Siano $\mathsf{x} \in \mathfrak{p}$ e $\mathsf{y} \in \mathfrak{n}$, allora $\mathsf{x}(v) = av$ per un $a \in \mathbb{C}$, e $\mathsf{y}(v) = 0$. Segue

$$[\mathsf{x}, \mathsf{y}](v) = \mathsf{x}(\mathsf{y}(v)) - \mathsf{y}(\mathsf{x}(v)) = \mathsf{x}(0) - \mathsf{y}(av) = -a\mathsf{y}(v) = 0 - a0 = 0$$

quindi $[\mathsf{x}, \mathsf{y}]$ è in $\mathfrak{n}$, allora $\mathfrak{n}$ è un ideale di $\mathfrak{p}$.

Siano ora $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2 \in \mathfrak{p}$, e siano $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tali che $\mathsf{x}_i(v) = a_i v$ per ogni i. Calcoliamo come agisce il bracket $[\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2]$ su v:

$$[\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2](v) = \mathsf{x}_1(\mathsf{x}_2(v)) - \mathsf{x}_2(\mathsf{x}_1(v)) = \mathsf{x}_1(a_2 v) - \mathsf{x}_2(a_1 v) = a_1 a_2 v - a_2 a_1 v = 0$$

cioè $[\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2]$ è in $\mathfrak{n}$. Segue $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{n}$.

(2) Consideriamo il quoziente $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$. Visto che $\mathfrak{n}$ contiene $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, il bracket di due elementi qualsiasi di $\mathfrak{p}$ è in $\mathfrak{n}$. Ma allora il bracket di due elementi qualsiasi di $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ è zero in $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$:

$$[\mathsf{x}_1 + \mathfrak{n}, \mathsf{x}_2 + \mathfrak{n}] = \underbrace{[\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2]}_{\in \mathfrak{n}} + \mathfrak{n} = 0 + \mathfrak{n}.$$

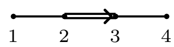
Cioè il quoziente $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ è abeliano, quindi risolubile, come l'ideale $\mathfrak{n}$ nel nostro caso. Segue che anche $\mathfrak{p}$ è risolubile.

(3) Basta applicare l'uguaglianza $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}$ che vale per le algebre di Lie semisemplici, per ottenere

$$\mathfrak{n} \supseteq [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}$$

da cui $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo F_4 in uno spazio euclideo E. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



(1) Dimostrare che $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$ è una radice positiva, e determinare se è lunga o corta.
(2) Sia $w \in W$ un elemento tale che $w(\beta)$ è una radice semplice. Si dimostri che w ha lunghezza almeno 3.

Soluzione esercizio 3. In questo esercizio denotiamo con s_i la riflessione semplice associata alla radice α_i, per ogni i.

(1) Calcoliamo

$$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 - \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$s_3(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \langle \alpha_1, \alpha_3^\vee \rangle \alpha_3 - \langle \alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 0 + 2\alpha_3$$

$$s_4(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \langle \alpha_1, \alpha_4^\vee \rangle \alpha_4 - \langle \alpha_2, \alpha_4^\vee \rangle \alpha_4 - 2\langle \alpha_3, \alpha_4^\vee \rangle \alpha_4 = \beta$$

quindi $\beta = s_4(s_3(s_2(\alpha_1)))$, da cui β è una radice. I suoi coefficienti rispetto alle radici semplici sono tutti > 0 quindi β è una radice positiva, ed è ottenuta da α_1 applicando un elemento del gruppo di Weyl quindi β è lunga quanto α_1, che è una radice lunga (ha la stessa lunghezza di α_2, che è più lunga di α_3).

(2) Scriviamo $w = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ dove $i_1, \dots, i_\ell$ sono indici nell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$. Ricordiamo che per ogni radice γ vale

$$s_{i_j}(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha_{i_j}^\vee \rangle \alpha_{i_j}.$$

Consideriamo i coefficienti di $s_{i_j}(\gamma)$ scritta come combinazione lineare delle radici semplici. La radice $s_{i_j}(\gamma)$ può avere coefficienti diversi da quelli di γ, ma la formula qui sopra implica che solo il coefficiente davanti ad α_{i_j} può essere diverso da quello che aveva γ.

Torniamo alla nostra β, che ha tutti e 4 i coefficienti non nulli davanti alle radici semplici. Ogni riflessione semplice nella scrittura di w può cambiare al più uno di questi coefficienti alla volta: se $w(b)$ è una radice semplice allora vuol dire che applicando la sequenza di riflessioni semplici tutti i coefficienti delle altre radici semplici sono cambiati almeno una volta.

Quindi una qualsiasi scrittura di w deve contenere almeno 3 riflessioni semplici, in particolare una qualsiasi scrittura ridotta. Segue che w ha lunghezza almeno 3.