Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Esame scritto

19.6.2023

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano $G, H \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ due sottogruppi chiusi, con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Rispondere alle seguenti domande, motivando le risposte.

(1) Supponiamo G e H connessi, e supponiamo che per ogni $\mathsf{x} \in \mathrm{Lie}(G)$ e ogni $\mathsf{y} \in \mathrm{Lie}(H)$ si abbia $[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = 0$. Possiamo dedurre l'uguaglianza $gh = hg$ per ogni $g \in G$ e $h \in H$?

(2) La risposta alla domanda precedente è diversa se supponiamo G connesso ma non supponiamo che H sia connesso?

(3) Supponiamo $\mathrm{Lie}(G) + \mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, sia K la chiusura in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ del sottogruppo generato da G e H. Possiamo dedurre che K è aperto in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$?

Soluzione esercizio 1. (1) La risposta è sì, dimostriamolo. Visto che G e H sono connessi, elementi qualsiasi $g \in G$ e $h \in H$ si possono scrivere come

$$g = e^{\mathsf{x}_1} e^{\mathsf{x}_2} \cdots e^{\mathsf{x}_r}$$

e

$$h = e^{\mathsf{y}_1} e^{\mathsf{y}_2} \cdots e^{\mathsf{y}_s}$$

per certi elementi $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_r \in \mathrm{Lie}(G)$ e $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_s \in \mathrm{Lie}(H)$, e allora

$$gh = e^{\mathsf{x}_1} e^{\mathsf{x}_2} \cdots e^{\mathsf{x}_r} \cdot e^{\mathsf{y}_1} e^{\mathsf{y}_2} \cdots e^{\mathsf{y}_s} = \ldots$$

Sappiamo che $[\mathsf{x}_r, \mathsf{y}_1] = 0$, cioè x_r e y_1 commutano, da cui segue

$$e^{\mathsf{x}_r} \cdot e^{\mathsf{y}_1} = e^{\mathsf{x}_r + \mathsf{y}_1} = e^{\mathsf{y}_1 + \mathsf{x}_r} = e^{\mathsf{y}_1} \cdot e^{\mathsf{x}_r}.$$

Quindi l'uguaglianza di prima prosegue con

$$\ldots = e^{\mathsf{x}_1} e^{\mathsf{x}_2} \cdots e^{\mathsf{x}_{r-1}} e^{\mathsf{y}_1} \cdot e^{\mathsf{x}_r} e^{\mathsf{y}_2} \cdots e^{\mathsf{y}_s} = \ldots$$

Allo stesso modo possiamo scambiare tutti gli esponenziali del tipo e^{x_i} con quelli del tipo e^{y_j}, arrivando all'espressione

$$\ldots = e^{\mathsf{y}_1} e^{\mathsf{y}_2} \cdots e^{\mathsf{y}_s} \cdot e^{\mathsf{x}_1} e^{\mathsf{x}_2} \cdots e^{\mathsf{x}_r} = hg$$

cioè $gh = hg$.

(2) Se H non è connesso allora la risposta in generale è no. Diamo un esempio. Sia $G \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ il sottogruppo delle matrici diagonali, e sia

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il sottogruppo H è finito, quindi la sua algebra di Lie è la sottoalgebra nulla $\mathrm{Lie}(H) = \{0\}$ di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Qualsiasi sia l'algebra di Lie di G, l'unico elemento $0 \in \mathrm{Lie}(H)$ commuta con tutti gli elementi di $\mathrm{Lie}(G)$. Però non tutti gli elementi di G commutano con gli elementi di H, ad esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in G} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

non è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) La risposta è sì, dimostriamolo. Il sottogruppo K è un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e contiene sia G sia H. Quindi l'algebra di Lie $\mathrm{Lie}(K)$ contiene i sottospazi $\mathrm{Lie}(G)$ e $\mathrm{Lie}(H)$, e anche la somma $\mathrm{Lie}(G) + \mathrm{Lie}(H)$, che è uguale a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, cioè tutte le matrici $n \times n$. Concludiamo che $\mathrm{Lie}(K)$ è proprio uguale a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Sappiamo che esiste un intorno aperto U di 0 in $\mathrm{Lie}(K)$ che viene mandato in un intorno aperto della matrice identità I_n in K tramite la mappa esponenziale, e che esiste un intorno aperto V di 0 in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ che viene mandato in un intorno aperto di I_n in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Quindi $W = \exp(U \cap V)$ è un intorno aperto di I_n in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tutto contenuto in K.

Dimostriamo che K è aperto in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ usando W. Dato un qualsiasi elemento $g \in K$, la moltiplicazione a sinistra per g induce un omeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & gx \end{array}$$

(con inversa la moltiplicazione per g^{-1}). Consideriamo l'immagine gW di W tramite questa applicazione: visto che W è un aperto di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, anche l'immagine gW è un aperto di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Inoltre W contiene I_n, quindi gW contiene $gI_n = g$, e infine gW è contenuto in K perché g è in K e lo sono anche tutti gli elementi di W.

Concludiamo che gW è un intorno aperto di g in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tutto contenuto in K, quindi K è intorno di ogni suo punto, cioè è aperto.

Esercizio 2. Sia V uno $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modulo di dimensione finita, e sia $(\mathsf{e},\mathsf{h},\mathsf{f})$ la base solita di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Supponiamo esistano due sottospazi vettoriali $A, B \subseteq V$ entrambi non nulli e tali che $A \cap B = \{0\}$, ed entrambi stabili per l'azione di e.

(1) Dimostrare che esistono vettori $v \in A$, $w \in B$ non nulli e tali che $\mathsf{e}.v = \mathsf{e}.w = 0$.
(2) Dimostrare che V non è irriducibile.
(3) Si può concludere che V non è irriducibile, anche se supponiamo solo $A \neq B$ invece che $A \cap B = \{0\}$? Motivare la risposta.

Soluzione esercizio 2. (1) La restrizione $\mathsf{e}|_A\colon A \to A$ è un endomorfismo nilpotente dello spazio vettoriale A che è non nullo. Il nucleo di $\mathsf{e}|_A$ non può essere nullo, altrimenti $\mathsf{e}|_A$ sarebbe un isomorfismo e non potrebbe essere nilpotente. Quindi esiste almeno un vettore non nullo v in A che viene mandato in 0 da e.

Lo stesso ragionamento si applica a $\mathsf{e}|_B\colon B \to B$.

(2) Supponiamo per assurdo che V sia irriducibile, e sia d il suo peso più alto. Sappiamo che V è somma diretta di spazi peso (cioè di autospazi per h) tutti di dimensione 1

$$V = V_d \oplus V_{d-2} \oplus \ldots \oplus V_{-d+2} \oplus V_{-d}$$

e sappiamo che $\mathsf{e}.V_i = V_{i+2}$ per ogni $i \in \{d-2, d-4, \ldots, -d+2, -d\}$. In particolare, se $i < d$ i vettori non nulli di V_i non vengono mandati in 0 da e. Scriviamo v del punto precedente come combinazione lineare

$$v = v_d + v_{d-2} + \ldots + v_{-d+2} + v_{-d}$$

con $v_i \in V_i$ per ogni i, e calcoliamo

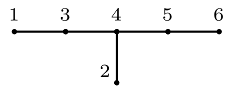
$$0 = \mathsf{e}.v = \underbrace{\mathsf{e}.v_d}_{=0} + \underbrace{\mathsf{e}.v_{d-2}}_{\in V_d} + \ldots + \underbrace{\mathsf{e}.v_{-d+2}}_{\in V_{-d+4}} + \underbrace{\mathsf{e}.v_{-d}}_{\in V_{-d+2}}\ .$$

Gli addendi del tipo $\mathsf{e}.v_i$ con $i < d$ sono tutti in spazi peso differenti, per i differenti, e questi spazi sono in somma diretta. L'uguaglianza $0 = \mathsf{e}.v$ quindi implica $\mathsf{e}.v_i = 0$ per ogni $i < d$, da cui $v_i = 0$ per ogni $i < d$ per quello che abbiamo visto.

Cioè $v = v_d$, e allora $v \in V_d$. Un ragionamento analogo si applica a w, quindi $w \in V_d$. Ma V_d ha dimensione 1, per cui v e w sono linearmente dipendenti e non nulli, il che contraddice $v \in A$, $w \in B$ e $A \cap B = \{0\}$. Assurdo, quindi V non è irriducibile.

(3) La risposta è no, diamo un esempio. Sia $V = \mathbb{C}^2$ con l'azione standard di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (moltiplicazione matrice per vettore). Poniamo $A = V$ e sia B lo spazio vettoriale generato dal primo vettore della base canonica di $\mathbb{C}^2$. Allora A e B sono diversi, entrambi stabili per e, ma V è irriducibile.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo E_6, e sia $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ una base di Φ, ordinata nel modo seguente:



(1) Dimostrare che esistono radici positive che sono combinazione lineare delle radici semplici con coefficienti tutti > 0.

(2) Sia $\beta = c_1\alpha_1 + \ldots + c_6\alpha_6$ una radice positiva. Supponiamo $c_2 \neq 0$ e $c_4 = 0$, dimostrare che $\beta = \alpha_2$.

Soluzione esercizio 3. (1) Sia s_i la riflessione semplice associata alla radice semplice α_i. Calcoliamo

$$s_6(s_5(s_2(s_4(s_3(\alpha_1))))) = s_6(s_5(s_2(s_4(\alpha_1 + \alpha_3)))) = s_6(s_5(s_2(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4))) =$$
$$s_6(s_5(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)) = s_6(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$

quindi abbiamo trovato una radice positiva che è combinazione lineare delle radici semplici con coefficienti tutti > 0.

(2) Supponiamo per assurdo che β non sia α_2. Non può essere neppure un multiplo di α_2, perché gli unici multipli di α_2 che sono radici sono $\pm\alpha_2$, e $-\alpha_2$ è negativa.

Quindi almeno un coefficiente fra c_1, c_3, c_5 e c_6 deve essere > 0, e anche c_2 è > 0. Calcoliamo $s_2(\beta)$, ottenendo

$$s_2(\beta) = c_1\alpha_1 + (-c_2\alpha_2) + c_3\alpha_3 + c_5\alpha_5 + c_6\alpha_6$$

visto che α_2 è ortogonale a tutte le altre radici semplici tranne α_4. Ma allora $s_2(\beta)$ è combinazione di radici semplici con coefficienti non tutti dello stesso segno, il che è assurdo per una radice. Quindi $\beta = \alpha_2$.