Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Esame scritto

10.2.2023

SOLUZIONI

Esercizio 1. Siano n un intero positivo e $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso. Sia $\vartheta\colon G \to G$ un'involuzione, cioè un automorfismo di G (automorfismo come gruppo e omeomorfismo come spazio topologico) diverso da Id_G ma tale che $\vartheta \circ \vartheta = \mathrm{Id}_G$.

(1) Si dimostri che $d\vartheta\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ soddisfa $d\vartheta \circ d\vartheta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Lie}(G)}$.

(2) Siano
$$P = \{g \in G \mid \vartheta(g) = g^{-1}\}$$
e
$$\mathfrak{p} = \{\mathsf{x} \in \mathrm{Lie}(G) \mid d\vartheta(\mathsf{x}) = -\mathsf{x}\}.$$
Si dimostri che $\exp(\mathfrak{p}) \subseteq P$, e che esiste un intorno U in G dell'elemento neutro tale che $U \cap P \subseteq \exp(\mathfrak{p})$.

(3) Sia $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $\vartheta\colon G \to G$ l'involuzione $A \mapsto {}^tA^{-1}$. Descrivere il sottoinsieme P in questo caso, e determinare se si tratta di un sottogruppo di G.

Soluzione esercizio 1. (1) Sia $\mathsf{y} \in \mathrm{Lie}(G)$, allora vale
$$\exp(d\vartheta(\mathsf{y})) = \vartheta(\exp(\mathsf{y})).$$
Applichiamo questa formula a $\mathsf{y} = d\vartheta(\mathsf{x})$ per qualsiasi $\mathsf{x} \in \mathrm{Lie}(G)$: segue
$$\exp(d\vartheta(d\vartheta(\mathsf{x}))) = \vartheta(\exp(d\vartheta(\mathsf{x}))) = \dots$$
e vale anche
$$\dots = \vartheta(\vartheta(\exp(\mathsf{x}))) = \exp(\mathsf{x}).$$
La stessa formula vale se moltiplichiamo x per un numero reale $t \in \mathbb{R}$. Ponendo $\mathsf{z} = d\vartheta(d\vartheta(\mathsf{x}))$, abbiamo $t\mathsf{z} = d\vartheta(d\vartheta(t\mathsf{x}))$ perché $d\vartheta$ è lineare, e l'uguaglianza di prima diventa
$$\exp(t\mathsf{z}) = \exp(t\mathsf{x}).$$
Derivando in $t = 0$ otteniamo $\mathsf{x} = \mathsf{z}$, cioè $d\vartheta(d\vartheta(\mathsf{x})) = \mathsf{x}$, in altre parole $d\vartheta \circ d\vartheta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Lie}(G)}$.

(2) Sia $\mathsf{x} \in \mathfrak{p}$, calcoliamo
$$\vartheta(\exp(\mathsf{x})) = \exp(d\vartheta(\mathsf{x})) = \exp(-\mathsf{x}) = \exp(\mathsf{x})^{-1}$$
quindi $\exp(\mathsf{x}) \in P$.

Viceversa, sia U_0 un intorno aperto dell'elemento neutro in G abbastanza piccolo in modo tale che il logaritmo sia definito in U_0, e in modo tale che $\exp|_{V_0}\colon V_0 \to U_0$ e $\log|_{U_0}\colon U_0 \to V_0$ siano omeomorfismi uno l'inverso dell'altro, dove abbiamo posto $V_0 = \log(U_0)$ (intorno aperto di 0 in $\mathrm{Lie}(G)$).

Se $g \in U_0 \cap P$, esiste unico $\mathsf{x} \in V_0$ con $\exp(\mathsf{x}) = g$, e vale
$$\exp(d\vartheta(\mathsf{x})) = \vartheta(\exp(\mathsf{x})) = \vartheta(g) = g^{-1} = \exp(-\mathsf{x}).$$
Da questo vogliamo concludere che $\mathsf{x} \in \mathfrak{p}$, ma non siamo sicuri di poter applicare il logaritmo agli elementi $\exp(d\vartheta(\mathsf{x}))$ e $\exp(-\mathsf{x})$, perché non è detto che siano in U_0. D'altronde, anche se supponiamo $\mathsf{x} \in V_0$, non è detto che anche $d\vartheta(\mathsf{x})$ e $-\mathsf{x}$ siano in V_0. Potremmo moltiplicare x per un parametro $t \in \mathbb{R}$ e derivare in $t = 0$ come nel punto precedente; per variare un po', usiamo invece il logaritmo in modo più accurato.

Rimpiazziamo U_0 e V_0 con aperti più piccoli, rispettivamente U e V, in modo tale che anche $d\vartheta(\mathsf{x})$ e $-\mathsf{x}$ appartengano sicuramente a V per ogni $\mathsf{x} \in V$. Ad esempio, possiamo prendere gli aperti $V = V_0 \cap d\vartheta(V_0) \cap (-V_0)$ e $U = \exp(V)$.

Stavolta, dato $g \in U \cap P$, gli elementi x, $d\vartheta(\mathsf{x})$ e $-\mathsf{x}$ sono tutti in V, i loro esponenziali sono tutti in U, quindi possiamo applicare il logaritmo ottenendo:
$$d\vartheta(\mathsf{x}) = \log(\exp(d\vartheta(\mathsf{x}))) = \log(\exp(-\mathsf{x})) = -\mathsf{x}.$$

cioè $\mathsf{x} \in \mathfrak{p}$ e quindi $g \in \exp(\mathfrak{p})$.

(3) In questo caso l'insieme P è formato dalle matrici invertibili A tali che ${}^tA^{-1} = A^{-1}$, condizione che è equivalente alla condizione ${}^tA = A$, cioè A è invertibile e simmetrica.

Se $n = 1$ allora ogni matrice è simmetrica, per cui P è in effetti un sottogruppo perché coincide con $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$. Però già per $n = 2$ abbiamo ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè due matrici A, B in P che hanno prodotto $A \cdot B$ non in P. Quindi P non è un sottogruppo per $n = 2$.

Per $n > 2$ basta replicare l'esempio precedente, costruendo due matrici che coincidano con la matrice identità dappertutto tranne che per il blocco 2×2 in alto a sinistra, in cui mettiamo rispettivamente A e B di prima.

Esercizio 2. Dato n un intero ≥ 3, sia $M \subseteq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ la sottoalgebra di Lie formata dalle matrici che hanno l'ultima riga tutta nulla. Sia $L \subseteq M$ la sottoalgebra di Lie data dalle matrici di M che hanno anche l'ultima colonna tutta nulla.

(1) Si consideri M come L-modulo tramite la rappresentazione aggiunta, si dimostri che M è un L-modulo completamente riducibile.
(2) Si trovi un ideale nilpotente di M tale che $M = L \oplus N$ (somma diretta di spazi vettoriali), e si dimostri che N è un L-modulo irriducibile tramite la rappresentazione aggiunta.
(3) Si dimostri che non è possibile scegliere N come nel punto precedente, ma in modo tale che $M = L \oplus N$ sia somma diretta di algebre di Lie.

Soluzione esercizio 2. (1) Le matrici di L hanno l'ultima riga e l'ultima colonna tutte nulle, e hanno traccia nulla. Quindi il blocco $(n-1) \times (n-1)$ è una matrice anch'essa a traccia nulla. Si deduce facilmente che L è isomorfa a $\mathfrak{sl}(n-1)$, e l'isomorfismo è dato semplicemente dall'eliminare l'n-esima riga e l'n-esima colonna.

Quindi stiamo considerando M come un $\mathfrak{sl}(n-1)$-modulo, e sappiamo che $\mathfrak{sl}(n-1)$ è semisemplice. Per il Teorema di Weyl, M è un modulo completamente riducibile.

(2) Le matrici di M sono fatte a blocchi:

$$\begin{pmatrix} C & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $C \in \mathfrak{sl}(n-1)$ e v è un vettore colonna di $\mathbb{C}^{n-1}$. Le matrici in L sono date dalla condizione $v = 0$ e C qualsiasi. Questo suggerisce di definire N come sottospazio vettoriale tramite la condizione $C = 0$ e v qualsiasi, cioè gli elementi di N sono del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con w un elemento qualsiasi di $\mathbb{C}^{n-1}$. Si tratta di un ideale di M, perchè

$$\left[\begin{pmatrix} C & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & Cw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se poniamo $C = 0$ in questo stesso calcolo appena fatto, vediamo che N è abeliano, quindi nilpotente. Infine, osserviamo che

$$\left[\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & Cw \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che N, come L-modulo tramite ad, è isomorfo a $\mathbb{C}^{n-1}$ con l'azione usuale di $\mathfrak{sl}(n-1)$, e sappiamo che $\mathbb{C}^{n-1}$ è un $\mathfrak{sl}(n-1)$-modulo irriducibile.

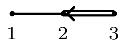
(3) Se per assurdo fosse possibile avere $M = L \oplus N$ come somma diretta di algebre di Lie, allora L sarebbe un ideale di M. Consideriamo gli elementi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $A \in L$ e $B \in M$ ma $B \notin L$, e vale $[A, B] = B$. Quindi L non è un ideale di M: assurdo.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo C_3 in uno spazio euclideo E. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



(1) Si dimostri che $\beta = 2\alpha_2 + \alpha_3$ è una radice lunga, ma che $\gamma = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$ non è una radice.
(2) Si trovi una radice lunga nella chiusura della camera fondamentale.
(3) Si dimostri che tutte le radici lunghe formano una singola orbita del gruppo di Weyl.

Soluzione esercizio 3. Ricordando che α_3 è lunga mentre α_2 è corta, applichiamo s_2 a β:

$$s_2(\beta) = s_2(2\alpha_2 + \alpha_3) = -2\alpha_2 + s_2(\alpha_3) = -2\alpha_2 + \alpha_3 - \underbrace{\langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle}_{=-2} \alpha_2 = \alpha_3.$$

Visto che α_3 è una radice lunga, otteniamo che β è una radice lunga.

Applichiamo qualche riflessione semplice a γ. Si calcola facilmente $s_1(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$, da cui

$$s_1(\gamma) = 2\alpha_2 + 2\alpha_3$$

e si calcola anche $s_3(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_2$, da cui

$$s_2(s_1(\gamma)) = 2\alpha_2.$$

Ora, il doppio di una radice non è una radice, quindi $2\alpha_2$ non è una radice, e quindi neppure γ.
La richiesta di trovare una radice lunga suggerisce di vedere prima di tutto se β è nella chiusura della camera fondamentale. Abbiamo

$$\langle \beta, \alpha_1^\vee \rangle = \langle 2\alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = -2 + 0 = -2 < 0$$

quindi no, β non è nella chiusura della camera fondamentale.

In una delle ultime lezioni abbiamo detto che le radici nella chiusura della camera fondamentale hanno coefficienti (rispetto alle radici semplici) più alti possibile. La radice β ha già coefficienti più alti di altre radici positive che vengono in mente facilmente, come $\alpha_1 + \alpha_2$. Quindi proviamo ad applicare riflessioni semplici a β, cercando di alzare i coefficienti ancora di più. Ad esempio prendiamo

$$\mu = s_1(\beta) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \mu, \alpha_1^\vee \rangle &= \langle 2\alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle + \langle 2\alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = 4 - 2 + 0 = 2 \\ \langle \mu, \alpha_2^\vee \rangle &= \langle 2\alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle + \langle 2\alpha_2, \alpha_2^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = -2 + 4 - 2 = 0 \\ \langle \mu, \alpha_3^\vee \rangle &= \langle 2\alpha_1, \alpha_3^\vee \rangle + \langle 2\alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle + \langle \alpha_3, \alpha_3^\vee \rangle = 0 - 2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

che sono tutti ≥ 0, quindi μ è lunga (perché è lunga tanto quanto β) ed è nella chiusura della camera fondamentale.
Data una radice lunga η qualsiasi, esiste una radice semplice nella W-orbita di η. L'unica radice semplice lunga è α_3, quindi quest'ultima è nella W-orbita di ogni radice lunga. Segue che esiste una sola tale orbita.