Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Esame scritto

23.1.2023

Esercizio 1. Sia $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, e sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'omomorfismo di gruppi dato dal coniugio per A:

$$\begin{array}{rccc} \gamma\colon & G & \to & G \\ & g & \mapsto & AgA^{-1} \end{array}$$

(1) Si scriva un'espressione esplicita per $d\gamma\colon \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.
(2) Sia $H \subseteq G$ il sottogruppo degli elementi g di G tali che $\gamma(g) = g$. Si dimostri che H contiene un sottogruppo chiuso isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$.
(3) Si trovi il numero di componenti connesse di H.

Soluzione esercizio 1. (1) Sia x un elemento qualsiasi di $\mathrm{Lie}(G)$. Sappiamo che

$$\exp(d\gamma(\mathsf{x})) = \gamma(\exp(\mathsf{x})) = A\exp(\mathsf{x})A^{-1} = \exp(A\mathsf{x}A^{-1}).$$

L'applicazione $d\gamma$ e l'applicazione $\mathsf{x} \mapsto A\mathsf{x}A^{-1}$ sono continue e anche lineari. Riscaliamo x con un coefficiente ε positivo in modo che $d\gamma(\varepsilon\mathsf{x})$ e $A\varepsilon\mathsf{x}A^{-1}$ abbiano norma piccola. In questo modo se ε è abbastanza piccolo, usando il logaritmo, l'uguaglianza

$$\exp(d\gamma(\varepsilon\mathsf{x})) = \exp(A\varepsilon\mathsf{x}A^{-1}),$$

implica

$$d\gamma(\varepsilon\mathsf{x}) = A\varepsilon\mathsf{x}A^{-1}.$$

Segue

$$d\gamma(\mathsf{x}) = A\mathsf{x}A^{-1}$$

che è la formula desiderata.

(2) Sia

$$g = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

un elemento qualsiasi di G. Calcoliamo $\gamma(g)$:

$$AgA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} & a_{2,3} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} & -a_{1,3} \\ a_{3,2} & -a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $g \in H$ se e solo se $a_{1,3} = a_{2,3} = -a_{1,3}$, $a_{3,1} = a_{3,2} = -a_{3,1}$, $a_{2,2} = a_{1,1}$ e $a_{1,2} = -a_{2,1}$. Allora H è il sottogruppo delle matrici invertibili del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ponendo $b = 0$ e $a, c > 0$ otteniamo un sottogruppo K di H, fatto dalle matrici diagonali ad entrate positive in cui le prime due entrate sulla diagonale sono uguali. L'operazione di gruppo fra due tali matrici è definita moltiplicando due a due le entrate corrispondenti (visto che sono matrici diagonali).

Allora K è isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$ tramite l'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^y \end{pmatrix}. \end{array}$$

(3) Le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

sono in H se e solo se il loro determinante è non nullo, cioè se e solo se $(a^2+b^2)c \neq 0$. Quindi il gruppo H è omeomorfo al sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ fatto dai punti (a,b,c) con $(a^2+b^2)c \neq 0$.

Questo sottoinsieme coincide con lo spazio $\mathbb{R}^3$ privato del piano di equazione $c = 0$ e dell'"asse c", cioè l'asse cartesiano di equazione $a = b = 0$. Si vede facilmente che questo insieme ha due componenti connesse, una definita dalla condizione $c > 0$ e l'altra definita dalla condizione $c < 0$.

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie su $\mathbb{C}$ di dimensione 4.

(1) Si dimostri che $L/\operatorname{Rad}(L)$ è semisemplice.
(2) Si consideri la rappresentazione di L su $\operatorname{Rad}(L)$ indotta dalla rappresentazione aggiunta, e si dimostri che se $\operatorname{Rad}(L)$ ha dimensione 1 allora ogni elemento di $\operatorname{Rad}(L)$ commuta con ogni elemento di $[L,L]$.
(3) Si dimostri che se $Z(L) = \{0\}$ allora L è risolubile.

Soluzione esercizio 2. (1) Va dimostrato che $L/\operatorname{Rad}(L)$ non ha ideali risolubili non nulli. Sia $I \subseteq L/\operatorname{Rad}(L)$ un ideale risolubile, allora esiste J ideale di L contenente $\operatorname{Rad}(L)$ tale che $I = J/\operatorname{Rad}(L)$. Sappiamo che J è risolubile, perché il suo ideale $\operatorname{Rad}(L)$ è risolubile e anche il quoziente $J/\operatorname{Rad}(L)$. Segue che J è contenuto nel radicale $\operatorname{Rad}(L)$, ma allora I è nullo.

(2) Supponiamo $\operatorname{Rad}(L)$ di dimensione 1. La rappresentazione di L citata nell'esercizio è

$$\begin{array}{ccl} L & \to & \mathfrak{gl}(\operatorname{Rad}(L)) \\ \mathsf{x} & \mapsto & \operatorname{ad}(\mathsf{x})|_{\operatorname{Rad}(L)} \colon \operatorname{Rad}(L) \to \operatorname{Rad}(L), \mathsf{y} \mapsto [\mathsf{x}, \mathsf{y}] \end{array}$$

e dobbiamo dimostrare che manda $[L,L]$ in zero. Sappiamo che $\mathfrak{gl}(\operatorname{Rad}(L))$ è isomorfo a $\mathfrak{gl}(1)$, quindi questa rappresentazione manda $[L,L]$ in $[\mathfrak{gl}(1), \mathfrak{gl}(1)] = \mathfrak{sl}(1) = \{0\}$.

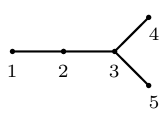
(3) Sappiamo che $L/\operatorname{Rad}(L)$ è semisemplice e ha dimensione ≤ 4, e che è somma diretta di algebre di Lie semplici. L'algebra di Lie semplice di dimensione più piccola è $\mathfrak{sl}(2)$, che ha dimensione 3. Quindi $L/\operatorname{Rad}(L)$ è nulla oppure ha dimensione 3. Se $L/\operatorname{Rad}(L)$ è nulla allora L è risolubile e abbiamo finito, quindi dobbiamo escludere il caso $L/\operatorname{Rad}(L)$ di dimensione 3.

Supponiamo allora per assurdo $L/\operatorname{Rad}(L)$ di dimensione 3. In questo caso avremmo $\operatorname{Rad}(L)$ di dimensione 1. Per il punto precedente $\operatorname{Rad}(L)$ commuta con $[L,L]$, e $\operatorname{Rad}(L)$ è anche abeliano perché ha dimensione 1.

Per il punto 1 abbiamo $[L/\operatorname{Rad}(L), L/\operatorname{Rad}(L)] = L/\operatorname{Rad}(L)$. Questo si può esprimere dicendo che, a meno di elementi di $\operatorname{Rad}(L)$, ogni elemento di L si può scrivere come combinazione lineare di bracket di altri elementi. In altre parole $L = [L,L] + \operatorname{Rad}(L)$.

Concludiamo che $\operatorname{Rad}(L)$ commuta con tutta L, cioè $\operatorname{Rad}(L)$ è nel centro di L, centro che però è nullo per ipotesi: assurdo.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo D_5, e si scelga una base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ numerata nel modo seguente:



(1) Si dimostri che $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ è una radice, e che $2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ non è una radice.
(2) Si trovi un elemento w del gruppo di Weyl tale $w(\alpha_4) \in \{\alpha_5, -\alpha_5\}$.

(3) Sia w un elemento del gruppo di Weyl tale che $w(\alpha_4) \in \{\alpha_5, -\alpha_5\}$ come nel punto precedente, tale che w abbia lunghezza minima possibile con questa proprietà. Si dimostri che una qualsiasi espressione ridotta di w inizia e finisce con s_3, riflessione semplice associata ad α_3.

Soluzione esercizio 3. (1) Calcoliamo alcune riflessioni semplici applicate in sequenza a questi elementi:

$$s_4(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = \alpha_3 + \alpha_5$$
$$s_3(\alpha_3 + \alpha_5) = \alpha_5$$

da cui concludiamo che $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ è una radice. Invece

$$s_3(2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = (-2\alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_3 + \alpha_5) = \alpha_4 + \alpha_5$$

Qui possiamo osservare che α_4 e α_5 sono ortogonali e della stessa lunghezza, e quindi $\alpha_4+\alpha_5$ non può avere la loro stessa lunghezza. Invece tutte le radici di Φ hanno la stessa lunghezza perché Φ è di tipo D_5, quindi $\alpha_4 + \alpha_5$ non può essere una radice e neppure $2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$.

Oppure possiamo osservare che

$$s_4(\alpha_4 + \alpha_5) = -\alpha_4 + \alpha_5$$

che non può essere una radice perché è scritta come combinazione lineare di radici semplici con coefficienti non tutti dello stesso segno.

(2) Calcoliamo

$$s_3(\alpha_4) = \alpha_3 + \alpha_4,$$
$$s_4(\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_3,$$
$$s_5(\alpha_4) = \alpha_4 + \alpha_5,$$
$$s_3(\alpha_3 + \alpha_5) = \alpha_5.$$

Quindi un elemento come richiesto è $w = s_3s_5s_4s_3$.

(3) Supponiamo che un'espressione ridotta di z non finisca con s_3. Supponiamo che finisca con s_1 ad esempio, ma α_1 e α_4 sono ortogonali, quindi $s_1(\alpha_4) = \alpha_4$. Togliamo alla scrittura ridotta di z l's_1 finale: otteniamo l'elemento zs_1, che ha lunghezza inferiore a z, e che manda anch'esso α_4 in $\pm\alpha_5$. Allora z non era fra quelli più corti possibile con quella proprietà: assurdo.

Un ragionamento analogo si applica anche supponendo che un'espressione ridotta z finisca con s_2 oppure con s_5. Rimane da considerare il caso in cui un'espressione ridotta di z finisca con s_4. Consideriamo qui zs_4, ottenuto dall'espressione ridotta data di z a cui abbiamo tolto l's_4 finale. Visto che $s_4(\alpha_4) = -\alpha_4$, abbiamo che zs_4 manda α_4 in $-z(\alpha_4)$, quindi sempre in $\{\alpha_5, -\alpha_5\}$. Anche qui abbiamo trovato un elemento più corto di z che manda α_4 in $\{\alpha_5, -\alpha_5\}$: contraddizione.

Concludiamo che una qualsiasi espressione ridotta di z finisce con s_3. Osserviamo ora che $z^{-1}(\alpha_5) \in \{\alpha_4, -\alpha_4\}$, e che z^{-1} dev'essere uno fra i più corti possibile con questa proprietà (altrimenti, invertendo, troveremmo un elemento più corto di z che manda α_4 in $\{\alpha_5, -\alpha_5\}$). Applicando un ragionamento simile a prima otteniamo che una qualsiasi espressione ridotta di z^{-1} termina con s_3, quindi una qualsiasi espressione ridotta di z comincia con s_3.