Es.: Dim. che $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}_{\neq 0},\times)$, $(\mathbb{R}_{>0},\times)$, S^1, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}_{\neq 0},\times)$ sono (isomorfi a) sgr chiusi di qualche $GL(n,\mathbb{R})$.

Svolgimento: $(\mathbb{R}_{\neq 0},\times) \cong GL(1,\mathbb{R})$, $(\mathbb{R}_{>0},\times) \cong \{A \in GL(1,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$

$(\mathbb{C}_{\neq 0},\times) \cong GL(1,\mathbb{C})$.

$$(\mathbb{R},+) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{R})$$

infatti $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\mathbb{C},+) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{C})$$

$$S^1 \cong SO(2,\mathbb{R}) \underset{\uparrow}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

esercizio!

Come mai ci permettiamo di usare anche $GL(n,\mathbb{C})$, se l'eserc. chiedeva $GL(n,\mathbb{R})$? Perché nel corso vedremo che $GL(n,\mathbb{C})$ è isomorfo a un sgr chiuso di $GL(2n,\mathbb{R})$.

Es.: $SL(n,\mathbb{R})$, $H=\{A\in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A)>0\}$, $SO(n,\mathbb{R})$

sono connessi per archi, quindi connessi.

Svolgim.: Fatto di algebra lineare: siano E_{ij} le matrici elem. $n\times n$, cioè E_{ij} ha tutti zeri tranne che al posto (i,j), dove c'è 1. Allora $SL(n,\mathbb{R})$ è generato come gruppo dalle matrici del tipo $I_n+\alpha E_{ij}$ $(i,j\in\{1,\dots,n\}, \alpha\in\mathbb{R})$. (Se non lo conoscevate, dimostratelo per esercizio! Sugg.: algoritmo di Gauß).

Usiamo questo fatto per dim. che $SL(n,\mathbb{R})$ è conn. per archi. Sia $g\in SL(n,\mathbb{R})$, scriviamola come

$$g=(I_n+\alpha_1 E_{i_1,j_1})\cdot\ldots\cdot(I_n+\alpha_m E_{i_m,j_m})$$

allora $g_t=(I_n+t\alpha_1 E_{i_1,j_1})\cdot\ldots\cdot(I_n+t\alpha_m E_{i_m,j_m})$

definisce un cammino continuo

$$[0,1]\longrightarrow SL(n,\mathbb{R})$$
$$t\longmapsto g_t$$

dove $g_0=I_n$, $g_1=g$.

Vediamo $\{\det(A)>0\}=H$: costruiamo

$$]0,+\infty[\times SL(n,\mathbb{R})\longrightarrow H$$
$$(t,g)\longmapsto \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t \end{pmatrix}\cdot g$$

E' suriettiva, e il dominio è connesso per archi, quindi H è connesso per archi.

Vediamo $SO(n,\mathbb{R})$: ricordiamo la procedura di Gram-Schmidt di ortogonalizz., applicata a una base qualsiasi $(v_1,..,v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ produce una base ortogonale. Inoltre è data da una formula "triangolare":

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = a_{21}v_1 + v_2 \\ w_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + v_3 \\ \vdots \end{cases}$$

e i coeff. $a_{21}, a_{31}, \dots$ sono funzioni continue dei vettori $v_1,..,v_n$.

La matrice di camb. di base da $(v_1,..,v_n)$ a $(w_1,..,w_n)$ è allora triangolare, ha det. $=1$, ed è f.ne continua di $(v_1,..,v_n)$.

Data ora una matrice $A \in SL(n,\mathbb{R})$, interpretiamo le sue colonne $(v_1,..,v_n)$ come una base di $\mathbb{R}^n$, e scriviamo $c(A)$ la matrice che ha per colonne $\left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, .., \frac{w_n}{\|w_n\|}\right)$. Questo def. un'applicaz. continua

$$c: SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow SO(n,\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto c(A)$$

e suriettiva (perché $c(A)=A$ se $A \in SO(n,\mathbb{R})$, cioè c è una retrazione).

Segue: $SO(n,\mathbb{R})$ è connesso per archi, perché $SL(n,\mathbb{R})$ lo è.

Esercizio: Rienunciare l'esercizio precedente con matrici su $\mathbb{C}$, cercando di usare le stesse dimostrazioni. In particolare, vanno trovati analoghi "buoni" per H e $SO(n,\mathbb{R})$;

$$SL(n,\mathbb{R}) \rightsquigarrow SL(n,\mathbb{C})$$
$$H \rightsquigarrow ?$$
$$SO(n,\mathbb{R}) \rightsquigarrow ? \quad \text{(NON USARE } SO(n,\mathbb{C})\text{ !)}$$

(PER CASA)

Es.: Dimostrare che le matrici diagonalizzabili di $M_2(\mathbb{R})$ non sono dense in $M_2(\mathbb{R})$.

Svolgim.: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, calcoliamo il pol. caratt.

$$p_A(x) = \det(I_2 x - A) = \det\begin{pmatrix} x-a & b \\ c & x-d \end{pmatrix} =$$

$$= (x-a)(x-d) - bc = x^2 + x(-a-d) + ad - bc$$

Se $p_A(x)$ ha radici $\notin \mathbb{R}$ allora A non è diagonalizzabile. Inoltre $p_A(x)$ ha radici $\notin \mathbb{R}$ se $(-a-d)^2 - 4(ad-bc) < 0$.

Quindi l'aperto $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid (-a-d)^2 - 4(ad-bc) < 0\}$,

che è non vuoto, non contiene matrici diagonalizzabili.