Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.9

1.12.2022

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Scrivere le radici delle algebre L dell'esercizio 7 del foglio 8, rispetto alla sottoalgebra torale massimale H indicata, in termini delle applicazioni

$$\varepsilon_i \colon \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \mapsto a_i$$

(*Suggerimento: per* $L = \mathfrak{so}(n, J_0)$ *conviene distinguere i due casi* n *dispari ed* n *pari.*)

Esercizio 2. Sia L algebra di Lie semisemplice, e la si scriva come somma diretta di algebre di Lie semplici

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t.$$

Sia H sottoalgebra torale massimale di L. Si dimostri che $H_i = L_i \cap H$ è una sottoalgebra torale massimale di L_i, per ogni i. Se ne deduca che (a meno di identificazioni naturali)

$$\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$$

dove Φ è l'insieme delle radici di L, e Φ_i è l'insieme delle radici di L_i, per ogni i.

Esercizio 3. Sia L algebra di Lie semisemplice e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che $H = N_L(H)$.

Esercizio 4. Sia L algebra di Lie semisemplice non nulla di dimensione ≤ 3. Si dimostri che L è isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Esercizio 5. Si dimostri che non esistono algebre di Lie semisemplici di dimensioni 1, 2, 4, 5, 7.

Esercizio 6. Sia L algebra di Lie semisemplice, e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che

$$\dim(L) \geq 3 \dim(H)$$

Per ogni intero positivo n, si trovino L e H tali che $\dim(H) = n$ e $\dim(L) = 3n$.

Esercizio 7. Sia $L \subseteq \mathfrak{so}(8, J_0)$ la sottoalgebra di Lie delle matrici della forma seguente

$$\begin{pmatrix} a_1 & n_7 & n_2 & -n_4 & n_4 & n_5 & n_3 & 0 \\ n_6 & a_1 + a_2 & n_4 & -n_5 & n_5 & n_1 & 0 & -n_3 \\ n_{11} & n_9 & a_2 & n_6 & -n_6 & 0 & -n_1 & -n_5 \\ -n_9 & -n_8 & n_7 & 0 & 0 & n_6 & -n_5 & -n_4 \\ n_9 & n_8 & -n_7 & 0 & 0 & -n_6 & n_5 & n_4 \\ n_8 & n_{12} & 0 & n_7 & -n_7 & -a_2 & -n_4 & -n_2 \\ n_{10} & 0 & -n_{12} & -n_8 & n_8 & -n_9 & -a_1 - a_2 & -n_7 \\ 0 & n_{10} & -n_8 & -n_9 & n_9 & -n_{11} & -n_6 & -a_1 \end{pmatrix}$$

dove $a_1, a_2, n_1, \ldots, n_{12} \in k$. Sia inoltre $H = L \cap \mathfrak{h}(8)$. Si assuma L semisemplice (in realtà è semplice) e si dimostri che H è una sottoalgebra abeliana massimale (essendo anche torale, da questo segue che è torale massimale). Si calcolino le radici di L rispetto alla sottoalgebra H. Quale potrebbe essere una figura[1] in $\mathbb{R}^2$ in qualche senso "abbastanza simmetrica" che corrisponda a queste radici, come l'esagono regolare corrisponde alle radici di $\mathfrak{sl}(3)$?

Esercizio 8. Sia E spazio euclideo e $\Phi \subseteq E$ un sistema di radici. Si dimostri che per ogni $\alpha \in \Phi$ l'intersezione $(\mathbb{R}\alpha) \cap \Phi$ è uguale a $\{\alpha, -\alpha\}$.

Esercizio 9. Sia E spazio euclideo e $\Phi \subseteq E$ un sistema di radici. Sia α un elemento non nullo di E, e sia $E' \subseteq E$ un sottospazio vettoriale. Si supponga $s_\alpha(E') = E'$, e si dimostri che allora $\alpha \in E'$, oppure tutti i vettori di E' sono ortogonali ad α.

[1] La figura sarebbe quella che viene calcolando la forma di Killing, ma non richiedo nell'esercizio di calcolarla esplicitamente.