Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.8

24.11.2022

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie, consideriamo L-moduli V, W e lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V, W)$ delle applicazioni lineari $f\colon V \to W$ con la struttura naturale di L-modulo vista a lezione.

(1) Si dimostri che f è un omomorfismo di L-moduli se e solo se $\mathsf{x}.f = 0$ per ogni $\mathsf{x} \in L$.

(2) Analogamente, se G è un gruppo e V, W sono G-moduli, si dimostri che f è un omomorfismo di G-moduli se e solo se $g \cdot f = f$ per ogni $g \in G$.

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie, e $b\colon L \times L \to k$ una forma bilineare. Sia $f\colon L \otimes L \to k$ la corrispondente applicazione lineare, cioè tale che $f(\mathsf{x} \otimes \mathsf{y}) = b(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ per ogni $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in L$. Dunque f è un elemento del duale $(L \otimes L)^*$ di $L \otimes L$. Si consideri L come un L-modulo tramite la rappresentazione aggiunta, il che induce una struttura naturale di L-modulo sul duale $(L \otimes L)^*$. Dimostrare che, considerando questa struttura di L-modulo, la forma bilineare b è associativa se e solo se $\mathsf{x}.f = 0$ per ogni $\mathsf{x} \in L$.

Esercizio 3. Sia L algebra di Lie semplice, e siano $b, c\colon L \times L \to k$ applicazioni bilineari associative (nel senso visto per la forma di Killing) e non degeneri. Si dimostri che b e c sono linearmente dipendenti.

Esercizio 4. Sia V un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo irriducibile di dimensione 2, e sia W un $\mathfrak{sl}(2)$-modulo irriducibile di dimensione 3. Si consideri $V \otimes W$ come $\mathfrak{sl}(2)$-modulo.

(1) Si trovino tutti gli h-autovettori di $V \otimes W$ in termini degli h-autovettori di V e W, e si trovino anche i relativi h-autovalori.

(2) Si calcolino le dimensioni degli h-autospazi di $V \otimes W$.

(3) Sappiamo che $V \otimes W$ è somma diretta di $\mathfrak{sl}(2)$-moduli irriducibili: si trovi il numero di addendi, e il pesi più alto di ciascun addendo.

Esercizio 5. Siano $L = \mathfrak{sl}(2)$ e $V = k^2$ con struttura naturale di L-modulo data dall'inclusione $\mathfrak{sl}(2) \subseteq \mathfrak{gl}(2)$. Si dimostri che V e V^* sono L-moduli isomorfi.

Esercizio 6. Si consideri la sottoalgebra L di $\mathfrak{sl}(3)$ formata dalle matrici in cui l'ultima riga e l'ultima colonna sono nulle.

(1) Si dimostri che $L \cong \mathfrak{sl}(2)$.

(2) Si consideri $\mathfrak{sl}(3)$ come L-modulo tramite la rappresentazione aggiunta, cioè $\mathsf{x} \in L$ agisce su $\mathsf{y} \in \mathfrak{sl}(3)$ come $\mathsf{x}.\mathsf{y} = [\mathsf{x}, \mathsf{y}]$. Si decomponga $\mathfrak{sl}(3)$ in somma diretta di L-moduli irriducibili, trovando il peso più alto di ciascun addendo.

Esercizio 7. Sia L una delle seguenti algebre di Lie: $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n, J_0)$, oppure $\mathfrak{sp}(n, J_1)$ (quest'ultima con n pari). Qui J_0 è la matrice tutta nulla tranne che sulla diagonale secondaria, dove ha tutte entrate uguali a 1, e J_1 è definita allo stesso modo ma sulla diagonale secondaria ha le prime $n/2$ entrate uguali a 1, e le seconde $n/2$ entrate uguali a -1 (andando da in alto a destra verso il basso a sinistra). Sia $H = L \cap \mathfrak{h}(n)$ la sottoalgebra delle matrici diagonali di L. Dimostrare che H è una sottoalgebra torale massimale di L, cioè se K è una sottoalgebra di L contenente H e se K è torale allora $K = H$. (*Suggerimento: dimostrare che H è sottoalgebra abeliana massimale.*)

Esercizio 8. Sia $H = \mathfrak{h}(2) \cap \mathfrak{sl}(2)$, e sia H' una qualsiasi sottoalgebra non nulla di $\mathfrak{sl}(2)$ tale che tutti gli elementi di H' sono semisemplici.

(1) Si dimostri che H' ha dimensione 1.

(2) Si dimostri che esiste $g \in \mathrm{GL}(2)$ tale che $gH'g^{-1} = H$.