Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.7

17.11.2022

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie risolubile, e sia V un L-modulo irriducibile. Si dimostri che $\dim(V) = 1$.

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie e V un L-modulo irriducibile. Si dimostri[1] che ogni elemento di $\mathrm{Rad}(L)$ agisce su V come la moltiplicazione per uno scalare.

Esercizio 3. Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ un'algebra di Lie tale che $\mathrm{Rad}(L)$ non è contenuto in $Z(L)$. Si usi l'esercizio precedente per dimostrare che esiste un L-modulo non completamente riducibile.

Esercizio 4. Per questo esercizio sia k un campo di caratteristica p dove p è un numero primo[2] , sia $L = \mathfrak{sl}(2, k)$ e $V = k[X, Y]_p$ lo spazio vettoriale dei polinomi in due variabili, omogenei di grado p. Si consideri V come L-modulo, usando le stesse formule dell'azione di $\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f}$ viste[3] in caratteristica 0, ma si dimostri che qui V non è un L-modulo irriducibile. Si dimostri per $p = 2$ che V non è neppure completamente riducibile.

Esercizio 5. Si calcoli il determinante della forma di Killing di $\mathfrak{sl}(3)$.

Esercizio 6. Si consideri la base usuale $(\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f})$ di $\mathfrak{sl}(2)$, e si calcoli la base duale rispetto alla forma di Killing.

Esercizio 7. Sia $(\mathsf{e}, \mathsf{h}, \mathsf{f})$ la base usuale di $\mathfrak{sl}(2)$, e sia $(\mathsf{e}', \mathsf{h}', \mathsf{f}')$ la base duale rispetto alla forma di Killing. Si calcoli l'elemento

$$\mathrm{ad}(\mathsf{e})\,\mathrm{ad}(\mathsf{e}') + \mathrm{ad}(\mathsf{h})\,\mathrm{ad}(\mathsf{h}') + \mathrm{ad}(\mathsf{f})\,\mathrm{ad}(\mathsf{f}').$$

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale e $T\colon V \to V$ un endomorfismo semisemplice. Si dimostri che $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

Esercizio 9. Siano $S_i\colon V \to V$ degli endomorfismi semisemplici di uno spazio vettoriale V indicizzati da i che varia in un insieme I qualsiasi, e si supponga $[T_i, T_j] = 0$ per ogni $i, j \in I$. Si dimostri che questi endomorfismi si diagonalizzano simultaneamente, cioè esiste una base di V fatta di autovettori di T_i per ogni i.

[1] Questo esercizio è difficile, suggerisco di risolverlo usando le stesse tecniche della dimostrazione del secondo teorema di "punto fisso".

[2] Questo esercizio è al di fuori del contesto in cui stiamo svolgendo questa parte del corso, e non è essenziale per la comprensione del corso stesso. Consiglio di tentare di rispondere se si vuole avere una prima idea di fenomeni tipici delle algebre di Lie in caratteristica positiva.

[3] Si tratta delle formule di $d\varphi(\mathsf{e}), d\varphi(\mathsf{h}), d\varphi(\mathsf{f})$ delle soluzioni dell'esercizio 9 del foglio 3.