

Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.6

10.11.2022

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Sia V un modulo per un gruppo oppure un'algebra di Lie. Supponiamo che V sia somma (non necessariamente diretta) di sottomoduli irriducibili

$$V = V_1 + \dots + V_t$$

Si dimostri che V è completamente riducibile.

Esercizio 2. Sia L algebra di Lie risolubile. Si dimostri che esistono ideali

$$\{0\} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \dots \subsetneq L_n = L$$

dove $n = \dim(L)$ e $i = \dim(L_i)$ per ogni i .

Esercizio 3. Questo esercizio è stato assegnato a lezione, durante la dimostrazione della decomposizione di Fitting. Per questo motivo, non si può usare detta decomposizione nello svolgimento. Sia T endomorfismo di uno spazio vettoriale V . Sia $\alpha \in k$, e si consideri $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che

$$\text{Ker}(T - \alpha \text{Id})^m = \text{Ker}(T - \alpha \text{Id})^{m+1}, \quad \text{Im}(T - \alpha \text{Id})^m = \text{Im}(T - \alpha \text{Id})^{m+1}.$$

Ricordiamo che con questa scelta abbiamo $V_\alpha = \text{Ker}(T - \alpha \text{Id})^m$. Si consideri poi la decomposizione

$$V = V_\alpha \oplus W$$

dove $W = \text{Im}(T - \alpha \text{Id})^m$. Si dimostri che $W_\beta = V_\beta$ per ogni $\beta \in k \setminus \{\alpha\}$, e che $W_\alpha = \{0\}$. (Suggerimento: si usi la proiezione di V su V_α lungo W , e si osservi che per ogni $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i polinomi $(x - \alpha)^m$ e $(x - \beta)^n$ sono coprimi se $\alpha \neq \beta$.)

Esercizio 4. Sia T endomorfismo di uno spazio vettoriale V , e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale stabile per T , cioè tale che $T(W) \subseteq W$. Supponendo che T sia semisemplice, dimostrare che anche la restrizione $T|_W: W \rightarrow W$ è semisemplice.

Esercizio 5. Siano $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale, tali che $[x, y] = 0$. Si dimostri che $(x + y)_s = x_s + y_s$ e $(x + y)_n = x_n + y_n$. Si trovi un esempio in cui queste uguaglianze non sono vere, per due elementi x e y che non commutano.

Esercizio 6. Sia L un'algebra di Lie nilpotente. Si dimostri che $\text{tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y)) = 0$ per ogni $x, y \in L$.

Esercizio 7. Sia L un'algebra di Lie risolubile. Si dimostri che $\text{tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y)) = 0$ per ogni $x \in [L, L]$ e ogni $y \in L$.

Esercizio 8. (1) Si calcoli $\text{tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y))$ per ogni scelta di x e y nella base solita (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$.

(2) Si trovino due elementi $x, y \in L = \mathfrak{sl}(2)$ tali che $y \in [L, L]$ e $\text{tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y)) \neq 0$.

Esercizio 9. Sia $L = \mathfrak{sl}(n)$ e per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sia $e_{i,j}$ la matrice elementare tutta nulla tranne che al posto (i, j) , dove ha entrata uguale a 1. Dati $i \neq j$, si dimostri che

$$\text{tr}(\text{ad}(e_{i,j}) \text{ad}(e_{s,t})) = 0$$

per ogni coppia (s, t) diversa da (j, i) .