Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.3

20.10.2022

Esercizio 1. Siano $G, H \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ due sottogruppi chiusi. Si dimostri che

$$\mathrm{Lie}(G \cap H) = \mathrm{Lie}(G) \cap \mathrm{Lie}(H).$$

Esercizio 2. Dimostrare che $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}(n)) = \mathfrak{u}(n)$ e che $\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(n)) = \mathfrak{su}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dove

$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n).$$

Esercizio 3.
(1) Dimostrare che $\mathfrak{su}(2)$ è isomorfa, come algebra di Lie su $\mathbb{R}$, all'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ (*Suggerimento: si trovino due basi, rispettivamente delle due algebre di Lie, tali che i rispettivi bracket fra gli elementi delle basi si comportino nello stesso modo. Dedurre che le algebre sono isomorfe.*).
(2) Si dimostri che $\mathrm{SU}(n)$ ha centro non banale, e se ne deduca che non è isomorfo a $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Esercizio 4. Siano $G, H \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sottogruppi chiusi e connessi. Dimostrare che se $\mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathrm{Lie}(H)$ allora $G \subseteq H$. Dedurre che se $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(H)$ allora $G = H$.

Esercizio 5. Sia $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso connesso. Si supponga $\mathrm{Lie}(G)$ abeliana, e si dimostri che

(1) la mappa esponenziale $\exp\colon \mathrm{Lie}(G) \to G$ è suriettiva, e che
(2) anche G è abeliano.

(*Si tratta del viceversa dell'esercizio 2 del foglio 2, ma con l'ipotesi aggiuntiva di G connesso.*)

Esercizio 6. Siano $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $H \subseteq \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ due sottogruppi chiusi, e sia $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ una rappresentazione continua. Dimostrare che

(1) se $\varphi(G) \subseteq H$ allora $d\varphi(\mathrm{Lie}(G)) \subseteq \mathrm{Lie}(H)$, e che
(2) se G è connesso e $d\varphi(\mathrm{Lie}(G)) \subseteq \mathrm{Lie}(H)$ allora $\varphi(G) \subseteq H$.

Esercizio 7. Consideriamo il gruppo topologico S^1, identificato col gruppo $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ delle rotazioni del piano attorno all'origine, e sia $\varphi\colon S^1 \to S^1$ un omomorfismo continuo.

(1) Dimostrare che φ è univocamente determinato dal suo differenziale $d\varphi\colon \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \to \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$.
(2) Dedurre dal punto precedente una lista completa esplicita di tutti gli omomorfismi continui $S^1 \to S^1$.
(3) Dimostrare che esistono rappresentazioni di $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ che non sono il differenziale di alcuna rappresentazione di $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

Esercizio 8. Si dia un esempio di un sottogruppo chiuso $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e di una rappresentazione continua $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, in modo che V sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, e V ammetta un $\mathrm{Lie}(G)$-sottomodulo che non è un G-sottomodulo.

Esercizio 9. Sia $k = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$, e si consideri $G = \mathrm{SL}(2, k)$. Sia $k[x, y]$ l'anello dei polinomi in due variabili a coefficienti in k, e $V = k[x, y]_d$ il sottospazio dei polinomi omogenei di grado d, per un intero d non negativo.

Dato $p \in k[x, y]$ e $g \in G$, definiamo $g \cdot p$ come il polinomio ottenuto nel modo seguente: la matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

trasforma[1] nel polinomio p la variabile x in $ax + cy$ e trasforma y in $bx + dy$. Ad esempio

$$g \cdot (x^2 y) = (ax + cy)^2 (bx + dy).$$

[1] Si noti che x non diventa $ax + by$ e y non diventa $cx + dy$, cioè non è come se stessimo moltiplicando la matrice con una specie di "colonna delle variabili" $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Se facessimo così non otterremmo una rappresentazione di G: fare la verifica!

(1) Si dimostri che questo definisce una rappresentazione $\varphi \colon G \to \mathrm{GL}(V)$.
(2) Si calcoli l'immagine tramite il differenziale di φ delle matrici
$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
che formano una base di $\mathfrak{sl}(2, k)$.
(3) Si dimostri che la rappresentazione $d\varphi$ di $\mathfrak{sl}(2, k)$ è irriducibile.

Esercizio 10. Siano $\alpha, \beta \colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ due applicazioni derivabili con derivate $\alpha', \beta' \colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$. Dimostrare che vale
$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)\beta(t)) = \alpha'(t)\beta(t) + \alpha(t)\beta'(t)$$
e che dato $v \in \mathbb{R}^n$ abbiamo
$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)v) = \alpha'(t)v.$$