Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.2

13.10.2022

Esercizio 1. Si dimostri che la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
non è l'esponenziale di alcuna matrice di $M_2(\mathbb{C})$ a traccia nulla. Se ne deduca che
$$\exp\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$
non è suriettiva.

Esercizio 2. Sia $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ un sottogruppo chiuso abeliano. Si dimostri che $[\mathsf{x},\mathsf{y}] = 0$ per ogni $\mathsf{x},\mathsf{y} \in \mathrm{Lie}(G)$, cioè $\mathrm{Lie}(G)$ è un'algebra di Lie[1] abeliana. (*Suggerimento: si consideri il sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ generato da G.*)

Esercizio 3. Siano n, m numeri interi con $1 \le m < n$, e si consideri l'insieme $\mathfrak{p}$ delle matrici $n \times n$ "a blocchi" della forma
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
dove A è una matrice $m \times m$, la matrice B è $m \times (n-m)$, la matrice C è $(n-m) \times (n-m)$, e tutte sono ad entrate in un campo k fissato.

(1) Si dimostri che $\mathfrak{p}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$.
(2) Si consideri il sottoinsieme $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{p}$ formato dalle matrici tali che A e C sono entrambe matrici nulle. Si dimostri che $\mathfrak{r}$ è un ideale di $\mathfrak{p}$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Data l'inclusione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, consideriamo $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $2n^2$. Con il bracket usuale è ovviamente un'algebra di Lie su $\mathbb{R}$, oltre che su $\mathbb{C}$. Si consideri ora il sottoinsieme
$$\mathfrak{u}(n) = \left\{ A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A + {}^t\overline{A} = 0 \right\}$$
cioè l'insieme delle matrici *antihermitiane*.

(1) Si dimostri che si tratta di una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.
(2) Perché non è una sottoalgebra di Lie se invece consideriamo $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ come algebra di Lie su $\mathbb{C}$?

Esercizio 5. Si esibisca un esempio di un sottogruppo chiuso $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (per qualche n) e una matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $e^X \in G$ ma $X \notin \mathrm{Lie}(G)$.

Esercizio 6. (1) Si dimostri che $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}))$ è una sottoalgebra di Lie di $M_n(\mathbb{R})$, e se ne calcoli la dimensione.
(2) Si dimostri che $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2,\mathbb{R}))$ è abeliana.

Esercizio 7. Si dimostri che esistono sottogruppi chiusi $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $H \subseteq \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ (per qualche n, m) tali che $\mathrm{Lie}(G)$ è isomorfa a $\mathrm{Lie}(H)$ come algebre di Lie, ma G e H non sono isomorfi come gruppi topologici. (*Suggerimento: si usi uno degli esercizi precedenti.*)

Esercizio 8. Ricordiamo la definizione del *gruppo unitario*
$$\mathrm{U}(n) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid A \cdot {}^t\overline{A} = I_n \right\}$$
e del gruppo *speciale unitario* $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.

Si dimostri che esistono applicazioni continue e suriettive $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{SU}(n)$. Se ne deduca che $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono connessi per archi.

[1] A lezione non abbiamo ancora dimostrato che $\mathrm{Lie}(G)$ è un'algebra di Lie. Per dimostrare che $[\mathsf{x},\mathsf{y}] = 0$ non è necessario assumerlo.