

## Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.10

7.12.2022

Se non specificato diversamente, tutti gli spazi vettoriali (e quindi tutte le algebre di Lie) sono definiti su un campo  $k$  algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Inoltre  $E$  denota uno spazio euclideo, con prodotto scalare  $(-, -)$ , contenente un sistema di radici  $\Phi$  con gruppo di Weyl  $W$ , e se non specificato altrimenti  $\Delta$  denota una base di  $\Phi$ .

**Esercizio 1.** Sia  $E$  di dimensione 2. Si calcoli l'ordine dell'elemento  $s_\alpha s_\beta$  del gruppo di Weyl  $W$ , dove  $\{\alpha, \beta\} = \Delta$  è una base qualsiasi di  $\Phi$ .

**Esercizio 2.** Sia  $E' \subset E$  un sottospazio vettoriale, e sia  $\Phi' = E' \cap \Phi$ . Supponiamo che  $\Phi'$  generi  $E'$  come spazio vettoriale. Si dimostri che allora  $\Phi'$  è un sistema di radici in  $E'$ .

**Esercizio 3.** Fissata  $\alpha \in \Phi$ , consideriamo

$$\Phi' = \{\beta \in \Phi \mid (\beta, \beta) = (\alpha, \alpha)\}$$

Sia  $E' \subseteq E$  il sottospazio vettoriale generato da  $\Phi'$ . Si dimostri che  $\Phi'$  è un sistema di radici in  $E'$ .

**Esercizio 4.** Riprendiamo le matrici  $J_0$  e  $J_1$  come nell'esercizio 7 del foglio 8.

- (1) Sia  $L = \mathfrak{sl}(n)$  e  $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$  con  $n = m + 1 \geq 2$ . Si consideri il corrispondente sistema di radici  $\Phi$ . Si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}\}$$

è una base di  $\Phi$ .

- (2) Sia  $L = \mathfrak{sp}(n, J_1)$  e  $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$ , con  $n = 2m \geq 2$  pari. Si consideri il corrispondente sistema di radici  $\Phi$ . Si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, 2\varepsilon_m\}$$

è una base di  $\Phi$ .

- (3) Sia  $L = \mathfrak{so}(n, J_0)$  e  $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$  con  $n = 2m + 1 \geq 3$  dispari. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, \varepsilon_m\}$$

è una base di  $\Phi$ .

- (4) Sia  $L = \mathfrak{so}(n, J_0)$  e  $H = \mathfrak{h}(n) \cap L$  con  $n = 2m \geq 4$  pari. In questo caso si dimostri che

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m\}$$

è una base di  $\Phi$ .

- (5) Usando un prodotto scalare tale che  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  è una base ortonormale, calcolare  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$  per ogni  $\alpha, \beta \in \Delta$ , per ogni base  $\Delta$  fra quelle qui sopra.

(Suggerimento per i primi tre punti: è facile verificare direttamente la definizione di base.)

**Esercizio 5.** Sia  $\Phi$  il sistema di radici di  $\mathfrak{sl}(n)$  come nell'esercizio precedente. Si dimostri che il gruppo di Weyl  $W$  di  $\Phi$  è isomorfo al gruppo simmetrico  $S_n$ .

**Esercizio 6.** Sia  $\sigma \in W$  e si supponga che  $\sigma$  coincide con la riflessione rispetto all'iperpiano  $\gamma^\perp$  ortogonale ad un vettore  $\gamma$  non nullo. Si dimostri che esiste  $\beta \in \Phi$  tale che  $\beta^\perp = \gamma^\perp$ .

**Esercizio 7.** Trovare un esempio di  $\Phi$  con due basi e un elemento  $w \in W$  che ha lunghezza rispetto a una base diversa dalla lunghezza rispetto all'altra base.

**Esercizio 8.** Dimostrare che per qualsiasi  $\Phi$  esistono due basi diverse tali che per ogni  $w \in W$  le lunghezze di  $w$  rispetto alle due basi sono uguali.

**Esercizio 9.** Dimostrare che per ogni  $p \in E$  esiste  $w \in W$  tale che  $w(p)$  è nella chiusura della camera fondamentale. (*Suggerimento: si prenda  $\gamma$  tale che  $\Delta = \Delta(\gamma)$ , e si prenda  $w$  tale che  $(\gamma, w(p))$  è massimo.*)